Дмитрий Письменный

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Тридцать пять лекций

2 часть

Дмитрий Письменный

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Тридцать пять лекций

2 часть

6-е издание

МОСКВА


АЙРИС ПРЕСС

2008

УДК 517(075.8)
ББК 22.1я73-2
П35

Письменный, Д. Т.
П35 Конспект лекций по высшей математике: [в 2 ч.]. Ч. 2 / Дмитрий Письменный. — 6-е изд. — М.: Айрис-пресс, 2008. — 256 с.: ил.

ISBN 978-5-8112-2921-5 (Ч. 2)
ISBN 978-5-8112-2922-4

Настоящий курс лекций предиазиачен для всех категорий студеитов, изучающих в том или ином объеме высшую математику.
Вторая часть содержит необходимый материал по 9-ти разделам курса высшей математики, которые обычио изучаются студеитами иа втором курсе вуза, а также дополнительные главы, иеобходимые при изучеиии специальиых курсов — двойиые, тройиые, криволииейиые и поверхиостиые иитегралы, ряды (от числовых до рядов Фурье), диффереициальиые уравиеиия, а также элемеиты теории поля и теории функций комплексиого перемеииого, осиовы операциоииого исчислеиия.
Изложеиие теоретического материала по всем темам сопровождается рассмотрением большого количества примеров и задач, ведется на доступиом, по возможности строгом языке.

УДК 517(075.8)
ББК 22.1я73-2

ISBN 978-5-8112-2921-5 (Ч. 2)
ISBN 978-5-8112-2922-4

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава II. ДВОЙНЫЕ И ТРОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Глава III. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Глава IV. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

Глава V. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Глава VI. РЯДЫ ФУРЬЕ. ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

Глава VII. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Глава VIII. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Глава IX. ЭЛЕМЕНТЫ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее пособие предназначено в первую очередь для студентов инженерно-технических специальностей; может быть полезным для всех категорий студентов, изучающих в том или ином объеме высшую математику. Оно представляет собой конспект лекций в 2 частях. ***Вторая часть*** адресована в основном второкурсникам. Набор освещаемых вопросов хорошо виден из оглавления.

Данный конспект содержит необходимый материал по 9 разделам курса высшей математики и дополнительным главам, необходимым при изучении специальных курсов. Изложение теоретического материала по всем темам сопровождается рассмотрением большого количества примеров и задач, ведется на доступном, по возможности строгом языке.

Пособие может быть использовано студентами также для самостоятельного изучения соответствующего материала, является базой для подготовки к сдаче зачетов и экзаменов по математическим дисциплинам.

Кроме того, книга должна помочь студенту и в тех случаях, когда он что-то не успел записать на лекции, какие-то лекции были пропущены, в чем-то трудно (или нет времени) разобраться по другим учебникам, когда некоторые вопросы «слишком длинны» в его конспектах или много фактического материала, который следует изучить за ограниченное количество времени.

Автор надеется, что данный курс лекций будет полезен и преподавателям, а использование данного пособия будет способствовать более глубокому изучению студентами курса высшей математики и смежных дисциплин.

Список обозначений:

◐ ● — начало и конец решения примера или задачи;

❏ ■ — начало и конец доказательства;

— важные определения

— «обратите особое внимание!»

В рамку заключены формулы, которые важно помнить.

Глава I. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Лекции 1–7

§ 1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ

1.1. Основные понятия



При решении различных задач математики, физики, химии и других наук часто пользуются математическими моделями в виде уравнений, связывающих независимую переменную, искомую функцию и ее производные. Такие уравнения называются ***дифференциальными*** (термин принадлежит Г. Лейбницу, 1676 г.). ***Решением*** дифференциального уравнения называется функция, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

Так, решением уравнения $y' = f(x)$ является функция $y = F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$.

Рассмотрим некоторые общие сведения о дифференциальных уравнениях (ДУ).

Если искомая (неизвестная) функция зависит от одной переменной, то ДУ называют *обыкновенным*; в противном случае — ДУ *в частных производных*. Далее будем рассматривать только обыкновенные ДУ.

Наивысший порядок производной, входящей в ДУ, называется *порядком* этого уравнения.

Например, уравнение $y''' - 3y'' + 2y = 0$ — обыкновенное ДУ третьего порядка, а уравнение $x^2y' + 5xy = y^2$ — первого порядка; $y \cdot z'_x = x \cdot z'_y$ — ДУ в частных производных первого порядка.

Процесс отыскания решения ДУ называется его *интегрированием*, а график решения ДУ — *интегральной кривой*.

Рассмотрим некоторые задачи, решение которых приводит к дифференциальным уравнениям.

1.2. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям

Задача 1

Материальная точка массы m замедляет свое движение под действием силы сопротивления среды, пропорциональной квадрату скорости V. Найти зависимость скорости от времени. Найти скорость точки через 3 с после начала замедления, если $V(0) = 100$ м/с, а $V(1) = 50$ м/с.

❍ Решение: Примем за независимую переменную время t, отсчитываемое от начала замедления движения материальной точки. Тогда скорость точки V будет функцией t, т. е. $V = V(t)$. Для нахождения $V(t)$ воспользуемся вторым законом Ньютона (основным законом механики): $m \cdot a = F$, где $a = V'(t)$ — есть ускорение движущегося тела, F — результирующая сила, действующая на тело в процессе движения.

В данном случае $F = -kV^2$, $k > 0$ — коэффициент пропорциональности (знак минус указывает на то, что скорость тела уменьшается). Следовательно, функция $V = V(t)$ является решением дифференциального уравнения $m \cdot V' = -k \cdot V^2$ или $V' = -\frac{k}{m}V^2$. Здесь m — масса тела.

Как будет показано ниже (пример 2.5), $V = \frac{1}{\frac{k}{m} \cdot t + c}$, где c — const. Найдя зависимость скорости от времени, легко найти скорость точки через 3 с после начала замедления.

Найдем сначала параметры $\frac{k}{m}$ и c. Согласно условию задачи, имеем: $V(0) = \frac{1}{c} = 100$ и $V(1) = \frac{1}{\frac{k}{m} + c} = 50$. Отсюда $c = \frac{1}{100}$, $\frac{k}{m} = \frac{1}{100}$. Следовательно, скорость точки изменяется по закону $V = \frac{100}{t+1}$. Поэтому $V(3) = 25$ м/с. ●

Задача 2

Найти кривую, проходящую через точку (4; 1), зная, что отрезок любой касательной к ней, заключенный между осями координат, делится в точке касания пополам.

❍ Решение: Пусть $M(x; y)$ — произвольная точка кривой, уравнение которой $y = f(x)$. Для определенности предположим, что кривая расположена в первой четверти (см. рис. 1).

Для составления дифференциального уравнения воспользуемся геометрическим смыслом первой производной: $\operatorname{tg}\alpha$ есть угловой коэффициент касательной; в точке $M(x; y)$ он равен y', т. е. $y' = \operatorname{tg}\alpha$.

Рис. 1.

Из рисунка видно, что $\operatorname{tg}(\angle MBC) = \frac{MC}{BC}$. Но

$$\operatorname{tg}(\angle MBC) = \operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha,$$

$MC = y$. По условию задачи $AM = MB$, следовательно, $OC = CB = x$.

Таким образом, получаем $-\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$ или $y' = -\frac{y}{x}$. Решением полученного дифференциального уравнения является функция $y = \frac{4}{x}$ (гипербола). Решение будет приведено в п. 2.2 (пример 2.4). ●

Другие задачи

Можно показать, что:

- закон изменения массы радия в зависимости от времени («радиоактивный распад») описывается дифференциальным уравнением $\frac{dm}{dt} = -k \cdot m$, где $k > 0$ — коэффициент пропорциональности, $m(t)$ — масса радия в момент t;

- «закон охлаждения тел», т. е. закон изменения температуры тела в зависимости от времени, описывается уравнением $\frac{dT}{dt} = k(T - t_0)$, где $T(t)$ — температура тела в момент времени t, k — коэффициент пропорциональности, t_0 — температура воздуха (среды охлаждения);

- зависимость массы x вещества, вступившего в химическую реакцию, от времени t во многих случаях описывается уравнением $\frac{dx}{dt} = k \cdot x$, где k — коэффициент пропорциональности;

- «закон размножения бактерий» (зависимость массы m бактерий от времени t) описывается уравнением $m'_t = k \cdot m$, где $k > 0$;

- закон изменения давления воздуха в зависимости от высоты над уровнем моря описывается уравнением $\frac{dp}{dh} = -k \cdot p$, где $p(h)$ — атмосферное давление воздуха на высоте h, $k > 0$.

Уже приведенные примеры указывают на исключительно важную роль дифференциальных уравнений при решении самых разнообразных задач.

§ 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

2.1. Основные понятия

Дифференциальное уравнение первого порядка в общем случае можно записать в виде

$$F(x; y; y') = 0. \tag{2.1}$$

Уравнение связывает независимую переменную x, искомую функцию y и ее производную y'. Если уравнение (2.1) можно разрешить относительно y', то его записывают в виде

$$y' = f(x; y) \tag{2.2}$$

и называют *ДУ первого порядка, разрешенным относительно производной*. Мы в основном будем рассматривать эту форму записи ДУ.

Уравнение (2.2) устанавливает связь (зависимость) между координатами точки $(x; y)$ и угловым коэффициентом y' касательной к интегральной кривой, проходящей через эту точку. Следовательно, ДУ $y' = f(x; y)$ дает совокупность направлений (*поле направлений*) на плоскости Oxy. Таково геометрическое истолкование ДУ первого порядка.

Кривая, во всех точках которой направление поля одинаково, называется *изоклиной*. Изоклинами можно пользоваться для приближенного построения интегральных кривых. Уравнение изоклины можно получить, если положить $y' = c$, т. е. $f(x; y) = c$.



Пример 2.1. С помощью изоклин начертить вид интегральных кривых уравнения $y' = 2x$.

Решение: Уравнение изоклин этого ДУ будет $2x = c$, т. е. изоклинами здесь будут прямые, параллельные оси Oy ($x = \frac{c}{2}$). В точках прямых проведем отрезки, образующие с осью Ox один и тот же угол α, тангенс которого равен c.

Так, при $c = 0$ имеем $x = 0$, $\operatorname{tg}\alpha = 0$, поэтому $\alpha = 0$;

при $c = 1$ уравнение изоклины $x = \frac{1}{2}$, поэтому $\operatorname{tg}\alpha = 1$ и $\alpha = 45°$;

при $c = -1$: $x = -\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = -1$, $\alpha = -45°$;

при $c = 2$: $x = 1$, $\operatorname{tg}\alpha = 2$, $\alpha = \operatorname{arctg} 2 \approx 63°$ и т. д.

Рис. 2.

Построив четыре изоклины и отметив на каждой из них ряд стрелочек, наклоненных к оси Ox под определенным углом (см. рис. 2), по их направлениям строим линии. Они, как видно, представляют собой семейство парабол. ●

Дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной, можно записать в ***дифференциальной форме***:

$$P(x;y)\,dx + Q(x;y)\,dy = 0, \tag{2.3}$$

где $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ — известные функции. Уравнение (2.3) удобно тем, что переменные x и y в нем равноправны, т. е. любую из них можно рассматривать как функцию другой. Отметим, что от одного вида записи ДУ можно перейти к другому.

Интегрирование ДУ в общем случае приводит к бесконечному множеству решений (отличающихся друг от друга постоянными величинами). Легко догадаться, что решением уравнения $y' = 2x$ является функция $y = x^2$, а также $y = x^2 + 1$, $y = x^2 - \sqrt{2}$ и вообще $y = x^2 + c$, где c — const.

Чтобы решение ДУ приобрело конкретный смысл, его надо подчинить некоторым дополнительным условиям.

Условие, что при $x = x_0$ функция y должна быть равна заданному числу y_0, т. е. $y = y_0$ называется ***начальным условием***. Начальное условие записывается в виде

$$y(x_0) = y_0 \quad \text{или} \quad y\Big|_{x=x_0} = y_0. \tag{2.4}$$

Общим решением ДУ первого порядка называется функция $y = \varphi(x;c)$, содержащая одну произвольную постоянную и удовлетворяющая условиям:

1. Функция $\varphi(x;c)$ является решением ДУ при каждом фиксированном значении c.

2. Каково бы ни было начальное условие (2.4), можно найти такое значение постоянной $c = c_0$, что функция $y = \varphi(x;c_0)$ удовлетворяет данному начальному условию.



Частным решением ДУ первого порядка называется любая функция $y = \varphi(x; c_0)$, полученная из общего решения $y = \varphi(x; c)$ при конкретном значении постоянной $c = c_0$.

Если общее решение ДУ найдено в неявном виде, т. е. в виде уравнения $\Phi(x; y; c) = 0$, то такое решение называется *общим интегралом* ДУ. Уравнение $\Phi(x; y; c_0) = 0$ в этом случае называется *частным интегралом* уравнения.

С геометрической точки зрения $y = \varphi(x; c)$ есть семейство интегральных кривых на плоскости Oxy; частное решение $y = \varphi(x; c_0)$ — одна кривая из этого семейства, проходящая через точку $(x_0; y_0)$.



Задача отыскания решения ДУ первого порядка (2.3), удовлетворяющего заданному начальному условию (2.4), называется ***задачей Коши.***

Теорема 2.1 (существования и единственности решения задачи Коши). Если в уравнении (2.2) функция $f(x; y)$ и ее частная производная $f'_y(x; y)$ непрерывны в некоторой области D, содержащей точку $(x_0; y_0)$, то существует единственное решение $y = \varphi(x)$ этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию (2.4).

(Без доказательства).

Геометрический смысл теоремы состоит в том, что при выполнении ее условий существует единственная интегральная кривая ДУ, проходящая через точку $(x_0; y_0)$.

Рассмотрим теперь методы интегрирования ДУ первого порядка определенного типа.

2.2. Уравнения с разделяющимися переменными

Наиболее простым ДУ первого порядка является, уравнение *вида*

$$P(x) \cdot dx + Q(y) \cdot dy = 0. \tag{2.5}$$

В нем одно слагаемое зависит только от x, а другое — от y. Иногда такие ДУ называют уравнениями *с разделенными переменными*. Проинтегрировав почленно это уравнение, получаем:

$$\int P(x) \cdot dx + \int Q(y) \cdot dy = c$$

— его общий интеграл.



Пример 2.2. Найти общий интеграл уравнения $x \cdot dx + y \cdot dy = 0$.

○ Решение: Данное уравнение есть ДУ с разделенными переменными. Поэтому $\int x \cdot dx - \int y \cdot dy = c_1$ или $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = c_1$. Обозначим $\frac{c}{2} = c_1$. Тогда $x^2 - y^2 = c$ — общий интеграл ДУ. ●

Более общий случай описывают уравнения с *разделяющимися переменными*, которые имеют вид

$$\boxed{P_1(x) \cdot Q_1(y) \cdot dx + P_2(x) \cdot Q_2(y) \cdot dy = 0.} \tag{2.6}$$

Особенность уравнения (2.6) в том, что коэффициенты при dx и dy представляют собой произведения двух функций (чисел), одна из которых зависит только от x, другая — только от y.

Уравнение (2.6) легко сводится к уравнению (2.5) путем почленного деления его на $Q_1(y) \cdot P_2(x) \neq 0$. Получаем:

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)} \cdot dx + \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)} \cdot dy = 0, \quad \int \frac{P_1(x)}{P_2(x)} \cdot dx + \int \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)} \cdot dy = c$$

— общий интеграл.

Замечания. 1. При проведении почленного деления ДУ на $Q_1(y) \cdot P_2(x)$ могут быть потеряны некоторые решения. Поэтому следует отдельно решить уравнение $Q_1(y) \cdot P_2(x) = 0$ и установить те решения ДУ, которые не могут быть получены из общего решения, — ***особые решения***.

2. Уравнение $y' = f_1(x) \cdot f_2(y)$ также сводится к уравнению с разделенными переменными. Для этого достаточно положить $y' = \frac{dy}{dx}$ и разделить переменные..

3. Уравнение $y' = f(ax + by + c)$, где a, b, c — числа, путем замены $ax + by + c = u$ сводится к ДУ с разделяющимися переменными. Дифференцируя по x, получаем:

$$\frac{du}{dx} = a + b \cdot \frac{dy}{dx}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{du}{dx} = a + b \cdot f(u),$$

откуда следует

$$\frac{du}{a + b \cdot f(u)} = dx.$$

Интегрируя это уравнение и заменяя u на $ax + by + c$, получим общий интеграл исходного уравнения.

Пример 2.3. Решить уравнение $(y + xy) \cdot dx + (x - xy) \cdot dy = 0$.

Решение: Преобразуем левую часть уравнения:

$$y \cdot (1 + x) \cdot dx + x \cdot (1 - y) \cdot dy = 0.$$

Оно имеет вид (2.6). Делим обе части уравнения на $xy \neq 0$:

$$\frac{1 + x}{x}\, dx + \frac{1 - y}{y}\, dy = 0.$$

Решением его является общий интеграл $x + \ln|x| + \ln|y| - y = c$, т. е. $\ln|xy| + x - y = c$.

Здесь уравнение $Q_1(y) \cdot P_2(x) = 0$ имеет вид $xy = 0$. Его решения $x = 0$, $y = 0$ являются решениями данного ДУ, но не входят в общий интеграл. Значит, решения $x = 0$, $y = 0$ являются особыми. ●

Пример 2.4. Решить уравнение $y' = -\frac{y}{x}$, удовлетворяющее условию $y(4) = 1$.

○ Решение: Этот пример представляет собой решение задачи 2 из п. 1.2. Имеем: $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$ или $\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$. Проинтегрировав, получим:

$$\ln|y| = \ln|c| - \ln|x|,$$

т. е. $y = \frac{c}{x}$ — общее решение ДУ.

Оно представляет собой, геометрически, семейство равносторонних гипербол. Выделим среди них одну, проходящую через точку $(4;1)$. Подставим $x = 4$ и $y = 1$ в общее решение уравнения: $1 = \frac{c}{4}$, $c = 4$.

Получаем: $y = \frac{4}{x}$ — частное решение уравнения $y' = -\frac{y}{x}$. ●

Пример 2.5. Найти общее решение ДУ $m \cdot V' = -k \cdot V^2$.

○ Решение: Этот пример демонстрирует решение задачи 1 из п. 1.2. Приведем данное уравнение к виду (2.5):

$$m \cdot \frac{dV}{dt} = -kV^2, \quad m \cdot dV + kV^2\,dt = 0, \quad \frac{dV}{V^2} + \frac{k}{m}\,dt = 0.$$

Интегрируем: $\int \frac{dV}{V^2} + \frac{k}{m}\int dt = -c$, т. е. $-\frac{1}{V} + \frac{k}{m}t + c = 0$. Отсюда $V = \frac{1}{\frac{k}{m}t + c}$ — общее решение уравнения. ●

2.3. Однородные дифференциальные уравнения

К уравнению с разделяющимися переменными приводятся однородные ДУ первого порядка.



Функция $f(x;y)$ называется *однородной функцией n-го порядка (измерения)*, если при умножении каждого ее аргумента на произвольный множитель λ вся функция умножится на λ^n, т. е.

$$f(\lambda \cdot x; \lambda \cdot y) = \lambda^n \cdot f(x;y).$$

Например, функция $f(x;y) = x^2 - 2xy$ есть однородная функция второго порядка, поскольку

$$f(\lambda \cdot x; \lambda \cdot y) = (\lambda x)^2 - 2(\lambda x)(\lambda y) = \lambda^2 \cdot (x^2 - 2xy) = \lambda^2 \cdot f(x;y).$$

Дифференциальное уравнение

$$y' = f(x;y) \tag{2.7}$$

называется ***однородным***, если функция $f(x;y)$ есть однородная функция нулевого порядка.

Покажем, что однородное ДУ (2.7) можно записать в виде

$$\boxed{y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).} \tag{2.8}$$

❑ Если $f(x;y)$ — однородная функция нулевого порядка, то, по определению, $f(x;y) = f(\lambda x; \lambda y)$. Положив $\lambda = \frac{1}{x}$, получаем:

$$f(x;y) = f\left(\frac{x}{x}; \frac{y}{x}\right) = f\left(1; \frac{y}{x}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \qquad ■$$

Однородное уравнение (2.8) преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными при помощи замены переменной (подстановки)

$$\boxed{\frac{y}{x} = u} \quad \text{или, что то же самое,} \quad \boxed{y = u \cdot x.} \tag{2.9}$$

Действительно, подставив $y = ux$ и $y' = u'x + u$ в уравнение (2.8), получаем $u'x + u = \varphi(u)$ или $x \cdot \frac{du}{dx} = \varphi(u) - u$, т. е. уравнение с разделяющимися переменными. Найдя его общее решение (или общий интеграл), следует заменить в нем u на $\frac{y}{x}$. Получим общее решение (интеграл) исходного уравнения.

Однородное уравнение часто задается в дифференциальной форме:

$$\boxed{P(x;y) \cdot dx + Q(x;y) \cdot dy = 0.} \tag{2.10}$$

ДУ (2.10) будет однородным, если $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ — однородные функции одинакового порядка.

Переписав уравнение (2.10) в виде $\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x;y)}{Q(x;y)}$ и применив в правой части рассмотренное выше преобразование, получим уравнение $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.



При интегрировании уравнений вида (2.10) нет необходимости предварительно приводить их (но можно) к виду (2.8): подстановка (2.9) сразу преобразует уравнение (2.10) в уравнение с разделяющимися переменными.

Пример 2.6. Найти общий интеграл уравнения

$$(x^2 - y^2) \cdot dx + 2xy \cdot dy = 0.$$

❍ Решение: Данное уравнение однородное, т. к. функции $P(x;y) = x^2 - y^2$ и $Q(x;y) = 2xy$ — однородные функции второго порядка.

Положим $y = u \cdot x$. Тогда $dy = x \cdot du + u \cdot dx$. Подставляем в исходное уравнение:

$$(x^2 - u^2x^2) \cdot dx + 2x \cdot ux \cdot x \cdot du + 2x \cdot ux \cdot u \cdot dx,$$
$$x^2(1 - u^2 + 2u^2) \cdot dx + 2ux^3 \cdot du = 0,$$
$$(1 + u^2) \cdot dx + 2ux \cdot du = 0,$$

последнее — уравнение с разделяющимися переменными. Делим переменные

$$\frac{dx}{x} + \frac{2u}{1 + u^2} \cdot du = 0$$

и интегрируем

$$\ln|x| + \ln(1+u^2) = c_1, \quad \ln\big(|x|\cdot(1+u^2)\big) = c_1, \quad |x|(1+u^2) = e^{c_1}.$$

Обозначим $c = e^{c_1}$, $c > 0$. Тогда

$$|x|\cdot(1+u^2) = c.$$

Заменяя u на $\frac{y}{x}$, получаем: $x^2 + y^2 = cx$ — общий интеграл исходного уравнения.

Отметим, что данное уравнение можно было сначала привести к виду (2.8):

$$x^2 - y^2 + 2xy\cdot\frac{dy}{dx} = 0, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2}{2xy}, \quad y' = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1}{2\cdot\frac{y}{x}}.$$

Затем положить $y = u\cdot x$, тогда $y' = u'x + u$ и т. д. ●

Замечание. Уравнение вида $y' = f\left(\dfrac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$, где a, b, c, a_1, b_1, c_1 — числа, приводится к однородному или с разделяющимися переменными. Для этого вводят новые переменные u и v, положив $x = u + \alpha$, $y = v + \beta$, где α и β — числа. Их подбирают так, чтобы уравнение стало однородным.

Пример 2.7. Найти общий интеграл уравнения

$$(x + 2y + 1)\cdot dx - (2x + y - 1)\cdot dy = 0,$$

т. е. $y' = \dfrac{x+2y+1}{2x+y-1}$.

Решение: Положив $x = u + \alpha$, $y = v + \beta$, получаем:

$$dx = du, \; dy = dv;$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du} = \frac{u+\alpha+2v+2\beta+1}{2u+2\alpha+v+\beta-1} = \frac{u+2v+(\alpha+2\beta+1)}{2u+v+(2\alpha+\beta-1)}.$$

Подберем α и β так, чтобы

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + 1 = 0, \\ 2\alpha + \beta - 1 = 0. \end{cases}$$

Находим, что $\alpha = 1$, $\beta = -1$. Заданное уравнение примет вид

$$\frac{dv}{du} = \frac{u+2v}{2u+v}$$

и будет являться однородным. Его решение получается, как это было показано выше, при помощи подстановки $v = tu$. Заметим, что, решив его, следует заменить u и v соответственно на $x - 1$ и $y + 1$. В итоге получим $(y - x + 2)^3 = c(x + y)$ — общий интеграл данного уравнения. ●

2.4. Линейные уравнения. Уравнение Я. Бернулли



Дифференциальное уравнение первого порядка называется ***линейным***, если его можно записать в виде

$$y' + p(x) \cdot y = g(x), \qquad (2.11)$$

где $p(x)$ и $g(x)$ — заданные функции, в частности — постоянные.

Особенность ДУ (2.11): искомая функция y и ее производная y' входят в уравнение в первой степени, не перемножаясь между собой.

Рассмотрим два метода интегрирования ДУ (2.11) — метод И. Бернулли и метод Лагранжа.

Метод И. Бернулли

Решение уравнения (2.11) ищется в виде произведения двух других функций, т. е. с помощью подстановки $y = u \cdot v$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ — неизвестные функции от x, причем одна из них произвольна (но не равна нулю — действительно любую функцию $y(x)$ можно записать как

$$y(x) = \frac{y(x)}{v(x)} \cdot v(x) = u(x) \cdot v(x),$$

где $v(x) \neq 0$). Тогда $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$. Подставляя выражения y и y' в уравнение (2.11), получаем: $u' \cdot v + u \cdot v' + p(x) \cdot u \cdot v = g(x)$ или

$$u' \cdot v + u \cdot (v' + p(x) \cdot v) = g(x). \qquad (2.12)$$

Подберем функцию $v = v(x)$ так, чтобы выражение в скобках было равно нулю, т. е. решим ДУ $v' + p(x) \cdot v = 0$. Итак, $\frac{dv}{dx} + p(x) \cdot v = 0$, т. е. $\frac{dv}{v} = -p(x) \cdot dx$. Интегрируя, получаем:

$$\ln|v| = -\int p(x) \cdot dx + \ln|c|.$$

Ввиду свободы выбора функции $v(x)$, можно принять $c = 1$. Отсюда

$$v = e^{-\int p(x) \cdot dx}.$$

Подставляя найденную функцию v в уравнение (2.12), получаем

$$u' \cdot e^{-\int p(x)\, dx} = g(x).$$

Получено уравнение с разделяющимися переменными. Решаем его:

$$\frac{du}{dx} \cdot e^{-\int p(x) \cdot dx} = g(x), \quad du = g(x) \cdot e^{+\int p(x) \cdot dx} dx,$$

$$u = \int g(x) \cdot e^{\int p(x) \cdot dx} dx + c.$$

Возвращаясь к переменной y, получаем решение

$$y = u \cdot v = \left(\int g(x) \cdot e^{\int p(x) \cdot dx} dx + c \right) \cdot e^{-\int p(x) \cdot dx} \qquad (2.13)$$

исходного ДУ (2.11).

Пример 2.8. Проинтегрировать уравнение $y' + 2xy = 2x$.

Решение: Полагаем $y = u \cdot v$. Тогда $u' \cdot v + u \cdot v' + 2x \cdot uv = 2x$, т. е. $u' \cdot v + u \cdot (v' + 2xv) = 2x$. Сначала решаем уравнение $v' + 2x \cdot v = 0$:

$$\frac{dv}{v} = -2x \cdot dx, \quad \ln|v| = -x^2, \quad v = e^{-x^2}.$$

Теперь решаем уравнение $u' \cdot e^{-x^2} + u \cdot 0 = 2x$, т. е.

$$\frac{du}{dx} = 2x \cdot e^{x^2}, \quad du = \int 2x \cdot e^{x^2} \cdot dx, \quad u = e^{x^2} + c.$$

Итак, общее решение данного уравнения есть $y = u \cdot v = (e^{x^2} + c) \cdot e^{-x^2}$, т. е. $y = 1 + c \cdot e^{-x^2}$. ●

Метод Лагранжа (метод вариации произвольной постоянной)

Уравнение (2.11) интегрируется следующим образом.

Рассмотрим соответствующее уравнение без правой части, т. е. уравнение $y' + p(x) \cdot y = 0$. Оно называется *линейным однородным ДУ первого порядка*. В этом уравнении переменные делятся:

$$\frac{dy}{y} = -p(x) \cdot dx \quad \text{и} \quad \ln|y| = -\int p(x) \cdot dx + \ln|c_1|.$$

Таким образом, $\left|\frac{y}{c_1}\right| = e^{-\int p(x) \cdot dx}$, т. е.

$$y = \pm c_1 e^{-\int p(x) \cdot dx} \quad \text{или} \quad y = c \cdot e^{-\int p(x) \cdot dx}, \quad \text{где} \quad c = \pm c_1.$$

Метод вариации произвольной постоянной состоит в том, что постоянную c в полученном решении заменяем функцией $c(x)$, т. е. полагаем $c = c(x)$. Решение уравнения (2.11) ищем в виде

$$y = c(x) \cdot e^{-\int p(x)\,dx}. \qquad (2.14)$$

Находим производную[1]:

$$y' = c'(x) \exp\Big(-\int p(x)\,dx\Big) + c(x) \exp\Big(-\int p(x)\,dx\Big) \cdot (-p(x)).$$

Подставляем значения y и y' в уравнение (2.11):

$$c'(x) \exp\Big(-\int p(x)\,dx\Big) - c(x)p(x) \exp\Big(-\int p(x)\,dx\Big) + \\ + c(x)p(x) \exp\Big(-\int p(x)\,dx\Big) = g(x).$$

Второе и третье слагаемые взаимно уничтожаются, и уравнение примет вид

$$c'(x) \exp\Big(-\int p(x)\,dx\Big) = g(x).$$

Следовательно,

$$dc(x) = g(x) \exp\Big(\int p(x)\,dx\Big) \cdot dx.$$

[1]Для удобства записи пользуемся обозначением $e^{F(x)} = \exp(F(x))$.

Интегрируя, находим:

$$c(x) = \int g(x) \cdot \exp\Bigl(\int p(x)\,dx\Bigr) \cdot dx + c.$$

Подставляя выражение $c(x)$ в равенство (2.14), получим общее решение ДУ (2.11):

$$y = \Bigl[\int g(x) \cdot \exp\Bigl(\int p(x)\,dx\Bigr) \cdot dx + c\Bigr] \cdot \exp\Bigl(-\int p(x)\,dx\Bigr).$$

Естественно, та же формула была получена методом Бернулли (ср. с (2.13)).

Пример 2.9. Решить пример 2.8 методом Лагранжа.

Решение: Решаем уравнение $y' + 2xy = 0$. Имеем $\frac{dy}{y} = -2x \cdot dx$, или $y = c \cdot e^{-x^2}$. Заменяем c на $c(x)$, т. е. решение ДУ $y' + 2xy = 2x$ ищем в виде $y = c(x) \cdot e^{-x^2}$. Имеем

$$y' = c'(x) \cdot e^{-x^2} + c(x) \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x).$$

Тогда

$$c'(x) \cdot e^{-x^2} - 2xc(x) \cdot e^{-x^2} + 2xc(x) \cdot e^{-x^2} = 2x, \quad \text{т.е.} \quad c'(x) \cdot e^{-x^2} = 2x,$$

или $c(x) = \int 2x \cdot e^{x^2} \cdot dx$, или $c(x) = e^{x^2} + c$. Поэтому $y = \left(e^{x^2} + c\right) \cdot e^{-x^2}$, или $y = 1 + c \cdot e^{-x^2}$ — общее решение данного уравнения. ●

Замечание. Уравнение вида $\bigl(x \cdot P(y) + Q(y)\bigr) \cdot y' = R(y)$, где $P(y)$, $Q(y)$, $R(y) \neq 0$ — заданные функции, можно свести к линейному, если x считать функцией, а y — аргументом: $x = x(y)$. Тогда, пользуясь равенством $y'_x = \frac{1}{x'_y}$, получаем $\frac{x \cdot P(y) + Q(y)}{x'} = R(y)$, т. е. $x' - \frac{P(y)}{R(y)} \cdot x = \frac{Q(y)}{R(y)}$ — линейное относительно x уравнение. Его решение ищем в виде $x = u \cdot v$, где $u = u(y)$, $v = v(y)$ — две неизвестные функции.

Пример 2.10. Найти общее решение уравнения $(x + y) \cdot y' = 1$.

Решение: Учитывая, что $y' = \frac{1}{x'}$, от исходного уравнения переходим к линейному уравнению $x' = x + y$.

Применим подстановку $x = u \cdot v$. Тогда $x' = u' \cdot v + u \cdot v'$. Получаем: $u' \cdot v + u \cdot v' = u \cdot v + y$, или $u' \cdot v + u(v' - v) = y$.

Находим функцию v: $v' - v = 0$, $\frac{dv}{v} = dy$, $v = e^y$.

Находим функцию u: $u' \cdot e^y + u \cdot 0 = y$, т. е. $u' = y \cdot e^{-y}$, или $u = \int y \cdot e^{-y} \cdot dy$. Интегрируя по частям, находим: $u = -y \cdot e^{-y} - e^{-y} + c$.

Значит, общее решение данного уравнения:

$$x = u \cdot v = (-y \cdot e^{-y} - e^{-y} + c) \cdot e^y,$$

или $x = -y - 1 + c \cdot e^y$. ●

Уравнение Я. Бернулли

Уравнение вида

$$y' + p(x) \cdot y = g(x) \cdot y^n, \; n \in \mathbb{R}, \; n \neq 0, \; n \neq 1 \tag{2.15}$$



называется ***уравнением Бернулли.*** Покажем, что его можно привести к линейному.

Если $n = 0$, то ДУ (2.15) — линейное, а при $n = 1$ — с разделяющимися переменными.

В общем случае, разделив уравнение (2.15) на $y^n \neq 0$, получим:

$$y^{-n} \cdot y' + p(x) \cdot y^{-n+1} = g(x). \tag{2.16}$$

Обозначим $y^{-n+1} = z$. Тогда $z' = \frac{dz}{dx} = (1-n) \cdot y^{-n} \cdot y'$. Отсюда находим $y^{-n} \cdot y' = \frac{z'}{1-n}$. Уравнение (2.16) принимает вид

$$\frac{1}{1-n} \cdot z' + p(x) \cdot z = g(x).$$

Последнее уравнение является линейным относительно z. Решение его известно. Таким образом, подстановка $z = y^{-n+1}$ сводит уравнение (2.15) к линейному. На практике ДУ (2.15) удобнее искать методом И. Бернулли в виде $y = u \cdot v$ (не сводя его к линейному).

2.5. Уравнение в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель

Уравнение

$$P(x;y)\,dx + Q(x;y)\,dy = 0 \tag{2.17}$$



называется ***уравнением в полных дифференциалах***, если его левая часть есть полный дифференциал некоторой функции $u(x;y)$, т. е.

$$P(x;y)\,dx + Q(x;y)\,dy = du(x;y).$$

В этом случае ДУ (2.17) можно записать в виде $du(x;y) = 0$, а его общий интеграл будет:

$$u(x;y) = c. \tag{2.18}$$

Приведем условие, по которому можно судить, что выражение

$$\Delta = P(x;y)\,dx + Q(x;y)\,dy$$

есть полный дифференциал.

Теорема 2.2. Для того чтобы выражение $\Delta = P(x;y)\,dx + Q(x;y)\,dy$, где функции $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ и их частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны в некоторой области D плоскости Oxy, было полным дифференциалом, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{2.19}$$

Необходимость

❑ Пусть Δ есть полный дифференциал, т. е.

$$P(x;y)\,dx + Q(x;y)\,dy = du(x;y).$$

Учитывая, что $du(x;y) = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy$ (см. Часть 1, п. 44.3), имеем:

$$P(x;y) = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad Q(x;y) = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Дифференцируя эти равенства по y и по x соответственно, получаем

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \cdot \partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \cdot \partial x}.$$

А так как смешанные частные производные $\frac{\partial^2 u}{\partial x \cdot \partial y}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial y \cdot \partial x}$ равны между собой (см. Часть 1, п. 44.2), получаем (2.19).

Достаточность

Пусть в области D выполняется условие (2.19). Покажем, что существует функция $u(x;y)$ в области D такая, что

$$du(x;y) = P(x;y)\,dx + Q(x;y)\,dy.$$

Найдем эту функцию. Искомая функция должна удовлетворять требованиям:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x;y) \text{ и } \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x;y). \tag{2.20}$$

Если в первом уравнении (2.20) зафиксировать y и проинтегрировать его по x, то получим:

$$u(x;y) = \int P(x;y)\,dx + \varphi(y). \tag{2.21}$$

Здесь произвольная постоянная $c = \varphi(y)$ зависит от y (либо является числом). В решении (2.21) не известна лишь $\varphi(y)$. Для ее нахождения продифференцируем функцию (2.21) по y:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(\int P(x;y)\,dx\right)'_y + \varphi'(y).$$

Используя второе равенство (2.20), можно записать:

$$Q(x;y) = \left(\int P(x;y)\,dx\right)'_y + \varphi'(y).$$

Отсюда

$$\varphi'(y) = Q(x;y) - \left(\int P(x;y)\,dx\right)'_y. \tag{2.22}$$

В равенстве (2.22) левая часть зависит от y. Покажем, что и правая часть равенства зависит только от y.

Для этого продифференцируем правую часть по x и убедимся, что производная равна нулю. Действительно,

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(Q(x;y) - \frac{\partial}{\partial y}\Big(\int P(x;y)\,dx\Big)\Big) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial}{\partial y}\Big(\int P(x;y)\,dx\Big)\Big) =$$

$$= \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big(\int P(x;y)\,dx\Big)\Big) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}(P) =$$

$$= \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

в силу условия (2.19).

Из равенства (2.22) находим $\varphi(y)$:

$$\varphi(y) = \int\Big(Q(x;y) - \frac{\partial}{\partial y}\Big(\int P(x;y)\,dx\Big)\Big)\,dy + c, \quad c \text{ — const}.$$

Подставляя найденное значение для $\varphi(y)$ в равенство (2.21), находим функцию $u(x;y)$ такую, что $du(x;y) = P(x;y)\,dx + Q(x;y)\,dy$. ■

Таким образом, при решении ДУ вида (2.17) сначала проверяем выполнение условия (2.19). Затем, используя равенства (2.20), находим функцию $u(x;y)$. Решение записываем в виде (2.18).

Пример 2.11. Решить уравнение $y' = \dfrac{5 - 2xy}{3y^2 + x^2}$.

Решение: Запишем уравнение в дифференциальной форме:

$$(2xy - 5)\,dx + (3y^2 + x^2)\,dy = 0.$$

Здесь $P(x;y) = 2xy - 5$, $Q(x;y) = 3y^2 + x^2$. Проверяем выполнение условия (2.19):

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Следовательно, данное уравнение есть уравнение в полных дифференциалах. Условия (2.20) будут здесь выглядеть как

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy - 5, \frac{\partial u}{\partial y} = 3y^2 + x^2.$$

Отсюда имеем

$$u(x;y) = \int(2xy - 5)\,dx = x^2y - 5x + \varphi(y);$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = (x^2y - 5x + \varphi(y))'_y = x^2 + \varphi'(y).$$

Далее

$$3y^2 + x^2 = x^2 + \varphi'(y), \quad \varphi'(y) = 3y^2,$$

$$\varphi(y) = y^3 + c_1, \quad u(x;y) = x^2y - 5x + y^3 + c_1.$$

Общим интегралом является $x^2y - 5x + y^3 + c_1 = c_2$, или $x^2y - 5x + y^3 = c$, где $c = c_2 - c_1$. ●

Если условие (2.19) не выполняется, то ДУ (2.17) не является уравнением в полных дифференциалах.

Однако это уравнение иногда можно привести к уравнению в полных дифференциалах умножением его на некоторую функцию $t(x;y)$, называемую ***интегрирующим множителем.***

Чтобы уравнение $t(x;y)\cdot P(x;y)\,dx + t(x;y)\cdot Q(x;y)\,dy = 0$ было уравнением в полных дифференциалах, должно выполняться условие

$$\frac{\partial}{\partial y}(t(x;y)\cdot P(x;y)) = \frac{\partial}{\partial x}(t(x;y)\cdot Q(x;y)).$$

Выполнив дифференцирование $\frac{\partial t}{\partial y}\cdot P + \frac{\partial P}{\partial y}\cdot t = \frac{\partial t}{\partial x}\cdot Q + \frac{\partial Q}{\partial x}\cdot t$ и приведя подобные слагаемые, получим

$$\frac{\partial t}{\partial y}\cdot P - \frac{\partial t}{\partial x}\cdot Q = t\Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big). \tag{2.23}$$

Для нахождения $t(x;y)$ надо проинтегрировать полученное ДУ в частных производных. Решение этой задачи не простое. Нахождение интегрирующего множителя может быть упрощено, если допустить существование t как функции только одного аргумента x либо только y. Пусть, например, $t = t(x)$. Тогда уравнение (2.23) принимает вид

$$-\frac{dt}{dx}\cdot Q = t\cdot\Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big), \quad \text{или} \quad \frac{dt}{t} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}\cdot dx.$$

Отсюда

$$t(x) = \exp\Big(\int \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}\,dx\Big). \tag{2.24}$$

При этом выражение $\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}$ должно зависеть только от x.

Аналогично получаем, что если $t = t(y)$ (t не зависит от x), то

$$t(y) = \exp\Big(\int \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P}\,dy\Big),$$

а подынтегральное выражение должно зависеть только от y.

Пример 2.12. Решить уравнение $(x^2 - y)\cdot dx + (x^2y^2 + x)\cdot dy = 0$.

Решение: Здесь $\frac{\partial P}{\partial y} = -1$; $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2xy^2 + 1$, т. е. $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$. Однако

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \frac{-1 - 2xy^2 - 1}{x^2y^2 + x} = \frac{-2}{x}$$

зависит только от x.

Следовательно, уравнение имеет интегрирующий множитель, зависящий только от x, выражение которого может быть получено при помощи формулы (2.24). В нашем случае получим, что

$$t(x) = \exp\Big(-\int \frac{2}{x}\,dx\Big) = \exp(-2\ln|x|) = \frac{1}{x^2}.$$

Умножая исходное уравнение на $t = \frac{1}{x^2}$, получаем:

$$\left(1 - \frac{y}{x^2}\right)dx + \left(y^2 + \frac{1}{x}\right)dy = 0,$$

т. е. уравнение в полных дифференциалах! Решив его, найдем, что общий интеграл заданного уравнения имеет вид

$$x + \frac{y}{x} + \frac{y^3}{3} = c.$$

●

2.6. Уравнения Лагранжа и Клеро

Рассмотрим дифференциальные уравнения, неразрешенные относительно производной. К ним, в частности, относятся уравнения Лагранжа и Клеро.

Уравнение Лагранжа

Уравнение вида

$$y = x \cdot \varphi(y') + \psi(y'), \tag{2.25}$$

где φ и ψ — известные функции от $y' = \frac{dy}{dx}$, называется ***уравнением Лагранжа***.

Введем вспомогательный параметр, положив $y' = p$. Тогда уравнение (2.25) примет вид

$$y = x \cdot \varphi(p) + \psi(p). \tag{2.26}$$

Дифференцируя по x, получим:

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(p) + x \cdot \varphi'(p) \cdot \frac{dp}{dx} + \psi'(p) \cdot \frac{dp}{dx},$$

т. е. $p - \varphi(p) = (x \cdot \varphi'(p) + \psi'(p)) \cdot \frac{dp}{dx}$, или

$$(p - \varphi(p)) \cdot \frac{dx}{dp} - x \cdot \varphi'(p) = \psi'(p). \tag{2.27}$$

Уравнение (2.27) есть линейное уравнение относительно неизвестной функции $x = x(p)$. Решив его, найдем:

$$x = \lambda(p; c). \tag{2.28}$$

Исключая параметр p из уравнений (2.26) и (2.28), получаем общий интеграл уравнения (2.25) в виде $y = \gamma(x; c)$.

Отметим, что, переходя к уравнению (2.27), мы делили на $\frac{dp}{dx}$. При этом могли быть потеряны решения, для которых $\frac{dp}{dx} = 0$, т. е. $p = p_0 = \text{const}$. Это значение p_0 является корнем уравнения $p - \varphi(p) = 0$ (см. (2.27)).

Решение $y = x \cdot \varphi(p_0) + \psi(p_0)$ является ***особым*** для уравнения (2.25) (см. понятие особого решения в п. 2.2).

Уравнение Клеро

Рассмотрим частный случай уравнения Лагранжа при $\varphi(y') \equiv y'$. Уравнение (2.25) принимает вид

$$\boxed{y = x \cdot y' + \psi(y')} \tag{2.29}$$



и называется ***уравнением Клеро***.

Положив $y' = p$, получаем:

$$y = xp + \psi(p). \tag{2.30}$$

Дифференцируя по x, имеем:

$$p = p + x \cdot \frac{dp}{dx} + \psi'(p) \cdot \frac{dp}{dx}, \quad \text{или} \quad (x + \psi'(p)) \cdot \frac{dp}{dx} = 0.$$

Если $\frac{dp}{dx} = 0$, то $p = c$. Поэтому, с учетом (2.30), ДУ (2.29) имеет общее решение

$$y = xc + \psi(c). \tag{2.31}$$

Если $x + \psi'(p) = 0$, то получаем частное решение уравнения в параметрической форме:

$$x = -\psi'(p), \ y = xp + \psi(p). \tag{2.32}$$

Это решение — *особое* решение уравнения Клеро: оно не содержится в формуле общего решения уравнения.



Пример 2.13. Решить уравнение Клеро $y = xy' + y'^2$.

❍ Решение: Общее решение, согласно формуле (2.31), имеет вид $y=cx+c^2$. Особое решение уравнения получаем согласно формулам (2.32) в виде $x = -2p$, $y = xp + p^2$. Отсюда следует: $y = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4}$, т. е. $y = -\frac{x^2}{4}$. ●

§ 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

3.1. Основные понятия

Дифференциальные уравнения порядка выше первого называются ДУ *высших порядков*. ДУ второго порядка в общем случае записывается в виде

$$F(x; y; y'; y'') = 0 \tag{3.1}$$

или, если это возможно, в виде, *разрешенном относительно старшей производной*:

$$y'' = f(x; y; y'). \tag{3.2}$$

Будем в основном рассматривать уравнение вида (3.2): от него всегда можно перейти к (3.1).



Решением ДУ (3.2) называется всякая функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.



Общим решением ДУ (3.2) называется функция $y = \varphi(x; c_1; c_2)$, где c_1 и c_2 — не зависящие от x произвольные постоянные, удовлетворяющая условиям:

1. $\varphi(x; c_1; c_2)$ является решением ДУ для каждого фиксированного значения c_1 и c_2.

2. Каковы бы ни были начальные условия

$$y\Big|_{x=x_0} = y_0, \; y'\Big|_{x=x_0} = y'_0, \tag{3.3}$$

существуют единственные значения постоянных $c_1 = c_1^0$ и $c_2 = c_2^0$ такие, что функция $y = \varphi(x; c_1^0; c_2^0)$ является решением уравнения (3.2) и удовлетворяет начальным условиям (3.3).

Всякое решение $y = \varphi(x; c_1^0; c_2^0)$ уравнения (3.2), получающееся из общего решения $y=\varphi(x; c_1; c_2)$ при конкретных значениях постоянных $c_1=c_1^0$, $c_2 = c_2^0$, называется ***частным решением***.

Решения ДУ (3.2), записанные в виде $\Phi(x; y; c_1; c_2)=0$, $\Phi(x; y; c_1^0; c_2^0)=0$, называются *общим и частным интегралом* соответственно.

График всякого решения ДУ второго порядка называется *интегральной кривой*. Общее решение ДУ (3.2) представляет собой множество интегральных кривых; частное решение — одна интегральная кривая этого множества, проходящая через точку $(x_0; y_0)$ и имеющая в ней касательную с заданным угловым коэффициентом $y'(x_0) = y'$.

Переписав ДУ (3.1) в виде

$$F\Big(x; y; y'; \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} \cdot (1+y'^2)^{3/2}\Big) = 0,$$

видим, что ДУ второго порядка устанавливает связь между координатами точки $(x; y)$ интегральной кривой, угловым коэффициентом $k = y'$ касательной к ней и кривизной $K = \dfrac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$ в точке $(x; y)$. В этом состоит геометрическое истолкование ДУ второго порядка.

Как и в случае уравнения первого порядка, задача нахождения решения ДУ (3.2), удовлетворяющего заданным начальным условиям (3.3), называется *задачей Коши*.

Теорема 3.1 (существования и единственности задачи Коши). Если в уравнении (3.2) функция $f(x; y; y')$ и ее частные производные f'_y и $f'_{y'}$ непрерывны в некоторой области D изменения переменных x, y и y', то для всякой точки $(x_0; y_0; y'_0) \in D$ существует единственное решение $y = \varphi(x)$ уравнения (3.2), удовлетворяющее начальным условиям (3.3).

Примем теорему без доказательства.

Аналогичные понятия и определения имеют место для *ДУ n-го порядка*, которое в общем виде записывается как

$$F(x; y; y'; y''; \ldots; y^{(n)}) = 0,$$

или
$$y^{(n)} = f(x; y; y'; y''; \dots; y^{(n-1)}) = 0, \qquad (3.4)$$
если его можно разрешить относительно старшей производной.

Начальные условия для ДУ (3.4) имеют вид
$$y\Big|_{x=x_0} = y_0,\ y'\Big|_{x=x_0} = y_0',\ y''\Big|_{x=x_0} = y_0'',\ \dots,\ y^{(n-1)}\Big|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}. \qquad (3.5)$$

Общее решение ДУ n-го порядка является функцией вида
$$y = \varphi(x; c_1; c_2; \dots; c_n),$$
содержащей n произвольных, не зависящих от x постоянных.

Решение ДУ (3.4), получающееся из общего решения при конкретных значениях постоянных $c_1 = c_1^0$, $c_2 = c_2^0$, …, $c_n = c_n^0$, называется *частным решением.*

Задача Коши для ДУ n-го порядка: найти решение ДУ (3.4), удовлетворяющее начальным условиям (3.5).

Проинтегрировать (решить) ДУ n-го порядка означает следующее: найти его общее или частное решение (интеграл) в зависимости от того, заданы начальные условия или нет.

Задача нахождения решения ДУ n-го порядка сложнее, чем первого. Поэтому рассмотрим лишь отдельные виды ДУ высших порядков.

3.2. Уравнения, допускающие понижение порядка

Одним из методов интегрирования ДУ высших порядков является *метод понижения порядка.* Суть метода состоит в том, что с помощью замены переменной (подстановки) данное ДУ сводится к уравнению, порядок которого ниже.

Рассмотрим три типа уравнений, допускающих понижение порядка.

I. Пусть дано уравнение
$$\boxed{y'' = f(x).} \qquad (3.6)$$

Порядок можно понизить, введя новую функцию $p(x)$, положив $y' = p(x)$. Тогда $y'' = p'(x)$ и получаем ДУ первого порядка: $p' = f(x)$. Решив его, т. е. найдя функцию $p = p(x)$, решим уравнение $y' = p(x)$. Получим общее решение заданного уравнения (3.6).

На практике поступают иначе: порядок понижается непосредственно путем последовательного интегрирования уравнения.

Так как $y'' = (y')' = \frac{dy'}{dx}$, уравнение (3.6) можно записать в виде $dy' = f(x)\,dx$. Тогда, интегрируя уравнение $y'' = f(x)$, получаем: $y' = \int f(x)\,dx$, или $y' = \varphi_1(x) + c_1$. Далее, интегрируя полученное уравнение по x, находим: $y = \int(\varphi_1(x) + c_1)\,dx$, т. е. $y = \varphi_2(x) + c_1x + c_2$ — общее решение данного уравнения.

Если дано уравнение
$$y^{(n)} = f(x),$$

то, проинтегрировав его последовательно n раз, найдем общее решение уравнения: $y = \varphi_n(x) + c_1 \cdot \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!} + c_2 \cdot \dfrac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \cdots + c_n$.

Пример 3.1. Решить уравнение $y^{IV} = \sin 2x$.

○ Решение: Последовательно интегрируя четыре раза данное уравнение, получим

$$y''' = \int \sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + c_1,$$

$$y'' = \int -\frac{1}{2}\cos 2x\,dx + \int c_1\,dx = -\frac{1}{4}\sin 2x + c_1 x + c_2,$$

$$y' = \frac{1}{8}\cos 2x + c_1\frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3,$$

$$y = \frac{1}{16}\sin 2x + c_1\frac{x^3}{6} + c_2\frac{x^2}{2} + c_3 x + c_4. \quad ●$$

II. Пусть дано уравнение

$$\boxed{y'' = f(x; y'),} \tag{3.7}$$

не содержащее явно искомой функции y.

Обозначим $y' = p$, где $p = p(x)$ — новая неизвестная функция. Тогда $y'' = p'$ и уравнение (3.7) принимает вид $p' = f(x; p)$. Пусть $p = \varphi(x; c_1)$ — общее решение полученного ДУ первого порядка. Заменяя функцию p на y', получаем ДУ: $y' = \varphi(x; c_1)$. Оно имеет вид (3.6). Для отыскания y достаточно проинтегрировать последнее уравнение. Общее решение уравнения (3.7) будет иметь вид $y = \int \varphi(x; c_1)\,dx + c_2$.

Частным случаем уравнения (3.7) является уравнение

$$\boxed{y'' = f(y'),} \tag{3.8}$$

не содержащее также и независимую переменную x. Оно интегрируется тем же способом: $y' = p(x)$, $y'' = p' = \dfrac{dp}{dx}$. Получаем уравнение $p' = f(p)$ с разделяющимися переменными.

Если задано уравнение вида

$$\boxed{F(x; y^{(k)}; y^{(k+1)}; \ldots; y^{(n)}) = 0,} \tag{3.9}$$

которое также не содержит явно искомой функции, то его порядок можно понизить на k единиц, положив $y^{(k)} = p(x)$. Тогда $y^{(k+1)} = p'$; ...; $y^{(n)} = p^{(n-k)}$ и уравнение (3.9) примет вид $F(x; p; p'; \ldots; p^{(n-k)}) = 0$.

Частным случаем уравнения (3.9) является уравнение

$$F(x; y^{(n-1)}; y^{(n)}) = 0,$$

или

$$\boxed{y^{(n)} = f(x; y^{(n-1)}).}$$

С помощью замены $y^{(n-1)} = p(x)$, $y^{(n)} = p'$ это уравнение сводится к ДУ первого порядка.

Пример 3.2. Решить уравнение $y'' - \frac{y'}{x} = 0$.

Решение: Полагаем $y' = p$, где $p = p(x)$, $y'' = p'$.

Тогда $p' - \frac{p}{x} = 0$. Это уравнение с разделяющимися переменными: $\frac{dp}{dx} = \frac{p}{x}$, $\frac{dp}{p} = \frac{dx}{x}$. Интегрируя, получим $\ln|p| = \ln|x| + \ln|c_1|$, $\ln|p| = \ln|c_1 x|$, $p = c_1 x$. Возвращаясь к исходной переменной, получим $y' = c_1 x$, $y = c_1 \frac{x^2}{2} + c_2$ — общее решение уравнения. ●

III. Рассмотрим уравнение

$$\boxed{y'' = f(y; y'),} \tag{3.10}$$

которое *не содержит* явно *независимой переменной* x.

Для понижения порядка уравнения введем новую функцию $p = p(y)$, зависящую от переменной y, полагая $y' = p$. Дифференцируем это равенство по x, учитывая, что $p = p(y(x))$:

$$y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{dp(y)}{dx} = \frac{dp(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp(y)}{dy} \cdot p,$$

т. е. $y'' = p \cdot \frac{dp}{dy}$. Теперь уравнение (3.10) запишется в виде $p \cdot \frac{dp}{dy} = f(y; p)$. Пусть $p = \varphi(y; c_1)$ является общим решением этого ДУ первого порядка. Заменяя функцию $p(y)$ на y', получаем $y' = \varphi(y; c_1)$ — ДУ с разделяющимися переменными. Интегрируя его, находим общий интеграл уравнения (3.10):

$$\int \frac{dy}{\varphi(y; c_1)} = x + c_2.$$

Частным случаем уравнения (3.10) является ДУ

$$\boxed{y'' = f(y).}$$

Такое уравнение решается при помощи аналогичной подстановки: $y' = p(y)$, $y'' = p \cdot \frac{dp}{dy}$.

Так же поступаем при решении уравнения $F(y; y'; y''; \ldots; y^{(n)}) = 0$. Его порядок можно понизить на единицу, положив $y' = p$, где $p = p(y)$. По правилу дифференцирования сложной функции находим $y'' = p\frac{dp}{dy}$. Затем найдем $y''' = \frac{d}{dx}(p \cdot p'_y) = \frac{d}{dy}(p \cdot p'_y) \cdot \frac{dy}{dx} = p((p'_y)^2 + p \cdot p''_{yy})$ и т. д.

Замечание. Уравнение (3.8) также можно решать, применяя подстановку $y' = p$, где $p = p(y)$.

Пример 3.3. Найти частное решение уравнения $y'' - (y')^2 + y'(y-1) = 0$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$.

Решение: Уравнение имеет вид (3.10). Положив $y' = p(y)$, $y'' = p \cdot \frac{dp}{dy}$, получаем:

$$p \cdot \frac{dp}{dy} - p^2 + p(y-1) = 0.$$

Так как $p \neq 0$ (иначе $y' = 0$, что противоречит начальному условию $y' = 2$), то $\frac{dp}{dy} - p + y - 1 = 0$ — получили линейное ДУ первого порядка.

Проведем решение полученного линейного ДУ методом Бернулли (п. 2.4). Полагаем $p = u \cdot v$. Имеем: $u'v + uv' - uv + y - 1 = 0$, или $u'v + u(v' - v) = 1 - y$.

Подберем функцию v так, чтобы $v' - v = 0$. Тогда $\frac{dv}{v} = dy$, $v = e^y$. Получаем:

$$u' \cdot e^y + u \cdot 0 = 1 - y, \quad \text{т. е.} \quad du = (1 - y) \cdot e^{-y}\, dy.$$

Интегрируя это равенство, находим, что $u = -(1 - y) \cdot e^{-y} + e^{-y} + c_1$. Следовательно,

$$p = uv = ((-1 + y)e^{-y} + e^{-y} + c_1) \cdot e^{+y}, \quad \text{или} \quad p = c_1 e^y + y.$$

Заменяя p на y', получаем: $y' = c_1 \cdot e^y + y$. Подставляя $y' = 2$ и $y = 2$ в это равенство, находим c_1:

$$2 = c_1 e^2 + 2, \quad c_1 = 0.$$

Имеем $y' = y$. Отсюда $y = c_2 e^x$. Находим c_2 из начальных условий: $2 = c_2 e^0$, $c_2 = 2$. Таким образом, $y = 2e^x$ — частное решение данного ДУ. ●

3.3. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков

Основные понятия

Многие задачи математики, механики, электротехники и других технических наук приводят к линейным дифференциальным уравнениям.

Уравнение вида

$$b_0(x)y^{(n)} + b_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + b_n(x)y = g(x), \tag{3.11}$$

где $b_0(x) \neq 0, b_1(x), \ldots, b_n(x), g(x)$ — заданные функции (от x), называется ***линейным ДУ n-го порядка***.

Оно содержит искомую функцию y и все ее производные лишь в первой степени. Функции $b_0(x), b_1(x), \ldots, b_n(x)$ называются *коэффициентами* уравнения (3.11), а функция $g(x)$ — его *свободным членом*.

Если свободный член $g(x) \equiv 0$, то уравнение (3.11) называется ***линейным однородным*** уравнением; если $g(x) \neq 0$, то уравнение (3.11) называется ***неоднородным***.

Разделив уравнение (3.11) на $b_0(x) \neq 0$ и обозначив

$$\frac{b_1(x)}{b_0(x)} = a_1(x), \ldots, \frac{b_n(x)}{b_0(x)} = a_n(x), \frac{g(x)}{b_0(x)} = f(x),$$

запишем уравнение (3.11) в виде *приведенного*:

$$\boxed{y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \cdots + a_n(x)y = f(x).} \tag{3.12}$$

Далее будем рассматривать линейные ДУ вида (3.12) и считать, что коэффициенты и свободный член уравнения (3.12) являются непрерывными функциями (на некотором интервале $(a; b)$). При этих условиях справедлива теорема существования и единственности решения ДУ (3.12) (см. теорему. 3.1).

3.4. Линейные однородные ДУ второго порядка

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение (ЛОДУ) второго порядка:

$$\boxed{y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0} \qquad (3.13)$$

и установим некоторые свойства его решений.

Теорема 3.2. Если функции $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ являются частными решениями уравнения (3.13), то решением этого уравнения является также функция

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x), \qquad (3.14)$$

где c_1 и c_2 — произвольные постоянные.

❑ Подставим функцию $y = c_1y_1 + c_2y_2$ и ее производные в левую часть ЛОДУ (3.13). Получаем:

$$\begin{aligned}(c_1y_1 + c_2y_2)'' + a_1(x)\cdot(c_1y_1 + c_2y_2)' + a_2(x)\cdot(c_1y_1 + c_2y_2) &=\\ = c_1y_1'' + c_2y_2'' + a_1(x)\cdot(c_1y_1' + c_2y_2') + a_2(x)\cdot(c_1y_1 + c_2y_2) &=\\ = c_1(y_1'' + a_1(x)\cdot y_1' + a_2(x)\cdot y) + c_2(y_2'' + a_1(x)y_2' + a_2(x)y_2) &=\\ = c_1\cdot 0 + c_2\cdot 0 = 0,&\end{aligned}$$

так как функции y_1 и y_2 — решения уравнения (3.13) и, значит, выражения в скобках тождественно равны нулю.

Таким образом, функция $y = c_1y_1 + c_2y_2$ также является решением уравнения (3.13). ■

Из теоремы 3.2, как следствие, вытекает, что если y_1 и y_2 — решения уравнения (3.13), то решениями его бу́дут также функции $y = y_1 + y_2$ и $y = c\cdot y_1$.

Функция (3.14) содержит две произвольные постоянные и является решением уравнения (3.13). Может ли она являться общим решением уравнения (3.13)?

Для ответа на вопрос введем понятие линейной зависимости и линейной независимости функций.

Функции $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ называются ***линейно независимыми*** на интервале $(a;b)$, если равенство

$$\alpha_1y_1 + \alpha_2y_2 = 0, \qquad (3.15)$$

где $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, выполняется тогда и только тогда, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Если хотя бы одно из чисел α_1 или α_2 отлично от нуля и выполняется равенство (3.15), то функции y_1 и y_2 называются ***линейно зависимыми*** на $(a;b)$.

Очевидно, что функции y_1 и y_2 линейно зависимы тогда и только тогда, когда они пропорциональны, т. е. для всех $x \in (a;b)$ выполняется равенство $\frac{y_1}{y_2} = \lambda$, или $y_1 = \lambda y_2$, $\lambda = \text{const}$.

Например, функции $y_1 = 3e^x$ и $y_2 = e^x$ линейно зависимы: $\frac{y_1}{y_2} = 3 = $ $= \text{const}$; функции y_1 и $y_3 = e^{2x}$ — линейно независимы: $\frac{y_1}{y_2} = \frac{3e^x}{e^{2x}} = 3e^{-x} \neq$ $\neq \text{const}$; функции $y_4 = \sin x$ и $y_5 = \cos x$ являются линейно независимыми: равенство $\alpha_1 \sin x + \alpha_2 \cos x = 0$ выполняется для всех $x \in \mathbb{R}$ лишь при $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ (или $\frac{y_4}{y_5} = \operatorname{tg} x \neq \text{const}$).

Средством изучения линейной зависимости системы функций является так называемый *определитель Вронского* или *вронскиан* (Ю. Вронский — польский математик).

Для двух дифференцируемых функций $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ вронскиан имеет вид

$$\boxed{W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}.}$$

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 3.3. Если дифференцируемые функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно зависимы на $(a; b)$, то определитель Вронского на этом интервале тождественно равен нулю.

❑ Так как функции y_1 и y_2 линейно зависимы, то в равенстве (3.15) значение α_1 или α_2 отлично от нуля. Пусть $\alpha_1 \neq 0$, тогда $y_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} y_2$; поэтому для любого $x \in (a; b)$

$$W(x) = \begin{vmatrix} -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} y_2 & y_2 \\ -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} y_2' & y_2' \end{vmatrix} = 0. \qquad \blacksquare$$

Теорема 3.4. Если функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — линейно независимые решения уравнения (3.13) на $(a; b)$, то определитель Вронского на этом интервале нигде не обращается в нуль.

Доказательство теоремы опустим.

Из теорем 3.3 и 3.4 следует, что *вронскиан не равен нулю ни в одной точке интервала $(a; b)$ тогда и только тогда, когда частные решения линейно независимы.*



Совокупность любых двух линейно независимых на интервале $(a; b)$ частных решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$ ЛОДУ второго порядка определяет ***фундаментальную систему решений*** этого уравнения: любое произвольное решение может быть получено как комбинация $y = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x)$.



Пример 3.4. Частные решения $y_1 = \sin x$ и $y_2 = \cos x$, $y_3 = 2\sin x$ и $y_4 = 5\cos x$ (их бесчисленное множество!) уравнения $y'' + y = 0$ образуют фундаментальную систему решений; решения же $y_5 = 0$ и $y_6 = \cos x$ — не образуют.

Теперь можно сказать, при каких условиях функция (3.14) будет общим решением уравнения (3.13).

Теорема 3.5 (структура общего решения ЛОДУ второго порядка). Если два частных решения $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ ЛОДУ (3.13) образуют на интервале $(a; b)$ фундаментальную систему, то общим решением этого уравнения является функция

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2, \tag{3.16}$$

где c_1 и c_2 — произвольные постоянные.

❑ Согласно теореме 3.2, функция (3.16) является решением уравнения (3.13). Остается доказать, что это решение общее, т. е. что из него можно выделить единственное частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям

$$y\Big|_{x=x_0} = y_0, \; y'\Big|_{x=x_0} = y'_0, \tag{3.17}$$

где $x_0 \in (a; b)$.

Подставив начальные условия (3.17) в решение (3.14), получим систему уравнений

$$\begin{cases} y_0 = c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0), \\ y'_0 = c'_1 y'_1(x_0) + c_2 y'_2(x_0), \end{cases}$$

где $y_0 = y(x_0)$, $y'_0 = y'(x_0)$, с неизвестными c_1 и c_2.

Определитель этой системы

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y'_1(x_0) & y'_2(x_0) \end{vmatrix} = W(x_0)$$

равен значению вронскиана $W(x)$ при $x = x_0$.

Так как решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ образуют фундаментальную систему решений на $(a; b)$ и $x_0 \in (a; b)$, то, согласно теореме 3.4, $W(x_0) \neq 0$. Поэтому система уравнений имеет единственное решение:

$$c_1 = c_1^0 = \frac{1}{W(x_0)} \cdot \begin{vmatrix} y_0 & y_2(x_0) \\ y'_0 & y'_2(x_0) \end{vmatrix}, \quad c_2 = c_2^0 = \frac{1}{W(x_0)} \cdot \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_0 \\ y'_1(x_0) & y'_0 \end{vmatrix}.$$

Решение $y = c_1^0 y_1(x) + c_2^0 y_2(x)$ является частным решением (единственным, в силу теоремы единственности) уравнения (3.13), удовлетворяющим начальным условиям (3.17). Теорема доказана. ■



Пример 3.5. На основании теоремы 3.5 общим решением уравнения $y'' + y = 0$ (см. пример 3.4) является функция $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x$.

3.5. Линейные однородные ДУ n-го порядка

Полученные результаты можно распространить на линейные однородные дифференциальные уравнения n-го порядка, имеющие вид

$$y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + a_2(x) \cdot y^{(n-2)} + \cdots + a_n(x) \cdot y = 0. \tag{3.18}$$

1. Если функции $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \dots, y_n = y_n(x)$ являются частными решениями уравнения (3.18), то его решением является и функция $y = c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n$.

2. Функции $y_1, y_2, \dots, y_n$ называются *линейно независимыми* на $(a; b)$, если равенство $\alpha_1y_1 + \alpha_2y_2 + \dots + \alpha_ny_n = 0$ выполняется лишь в случае, когда все числа $\alpha_i = 0$ $(i = 1, 2, \dots, n)$; в противном случае (если хотя бы одно из чисел α_i не равно нулю) функции $y_1, y_2, \dots, y_n$ — *линейно зависимы.*

3. Определитель Вронского имеет вид

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \dots & y_n'' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

4. Частные решения $y_1, y_2, \dots, y_n$ уравнения (3.18) образуют *фундаментальную систему решений* на $(a; b)$, если ни в одной точке этого интервала вронскиан не обращается в нуль, т. е. $W(x) \neq 0$ для всех $x \in (a; b)$.

5. Общее решение ЛОДУ (3.18) имеет вид $y = c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n$, где c_i $(i = 1, \dots, n)$ — произвольные постоянные, y_i — частные решения уравнения (3.18), образующие фундаментальную систему.

Пример 3.6. Показать, что функции $y_1 = e^x$, $y_2 = x \cdot e^x$, $y_3 = x^2 \cdot e^x$ образуют фундаментальную систему решений некоторого ЛОДУ третьего порядка (дополнительно: составить это уравнение).

Решение: Найдем $W(x)$:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & xe^x & x^2e^x \\ e^x & (x+1)e^x & (x^2+2x)e^x \\ e^x & (x+2)e^x & (x^2+4x+2)e^x \end{vmatrix} = e^{3x} \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & x+1 & x^2+2x \\ 1 & x+2 & x^2+4x+2 \end{vmatrix} =$$

$$= e^{3x} \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 2 & 4x+2 \end{vmatrix} = e^{3x} \cdot (4x + 2 - 4x) = 2e^{3x}.$$

Ясно, что $W(x) \neq 0$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Следовательно, данные функции образуют фундаментальную систему решений ЛОДУ третьего порядка. В общем виде ЛОДУ третьего порядка выглядит так:

$$y''' + a_1(x)y'' + a_2(x)y' + a_3(x)y = 0.$$

Подставив функции y_1, y_2, y_3 в это уравнение, получим систему из трех уравнений относительно функций $a_1(x)$, $a_2(x)$, $a_3(x)$. Решая ее, получим ЛОДУ $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$; его общее решение:

$$y = c_1e^x + c_2xe^x + c_3x^2e^x.$$

§ 4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДУ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

4.1. Интегрирование ЛОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами

Частным случаем рассмотренных выше линейных однородных дифференциальных уравнений являются *ЛОДУ с постоянными коэффициентами.*

Пусть дано ЛОДУ второго порядка

$$\boxed{y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0,} \tag{4.1}$$

где p и q постоянны.

Для нахождения общего решения уравнения (4.1) достаточно найти два его частных решения, образующих фундаментальную систему (см. теорему 3.5).

Будем искать частные решения уравнения (4.1) в виде

$$y = e^{kx},$$

где k — некоторое число (предложено Л. Эйлером). Дифференцируя эту функцию два раза и подставляя выражения для y, y' и y'' в уравнение (4.1), получим: $k^2 \cdot e^{kx} + p \cdot k \cdot e^{kx} + q \cdot e^{kx} = 0$, т. е.

$$e^{kx} \cdot (k^2 + pk + q) = 0, \quad \text{или} \quad k^2 + pk + q = 0 \ (e^{kx} \neq 0). \tag{4.2}$$

Уравнение (4.2) называется ***характеристическим уравнением*** ДУ (4.1) (для его составления достаточно в уравнении (4.1) заменить y'', y' и y соответственно на k^2, k и 1).

При решении характеристического уравнения (4.2) возможны следующие три случая.

Случай 1. Корни k_1 и k_2 уравнения (4.2) действительные и различные: $k_1 \neq k_2 \left(D = \frac{p^2}{4} - q > 0\right)$.

В этом случае частными решениями уравнения (4.1) являются функции $y_1 = e^{k_1 x}$ и $y_2 = e^{k_2 x}$. Они образуют фундаментальную систему решений (линейно независимы), т. к. их вронскиан

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} \end{vmatrix} = k_2 e^{(k_1+k_2)x} - k_1 e^{(k_1+k_2)x} = e^{(k_1+k_2)x} \cdot (k_2 - k_1) \neq 0.$$

Следовательно, общее решение уравнения (4.1), согласно формуле (3.16), имеет вид

$$\boxed{y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}.} \tag{4.3}$$



Пример 4.1. Решить уравнение $y'' - 5y' + 6y = 0$.

○ Решение: Составим характеристическое уравнение: $k^2 - 5k + 6 = 0$. Решаем его: $k_1 = 2$, $k_2 = 3$. Записываем общее решение данного уравнения: $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$, где c_1 и c_2 — произвольные постоянные (формула (4.3)). ●

Случай 2. Корни k_1 и k_2 характеристического уравнения (4.2) действительные и равные: $k_1 = k_2$ $\left(D = \frac{p^2}{4} - q = 0,\ k_1 = k_2 = -\frac{p}{2}\right)$.

В этом случае имеем лишь одно частное решение $y_1 = e^{k_1 x}$.

Покажем, что наряду с y_1 решением уравнения (4.1) будет и $y_2 = xe^{k_1 x}$.

Действительно, подставим функцию y_2 в уравнение (4.1). Имеем:

$$\begin{aligned} y_2'' + py_2' + qy_2 &= (xe^{k_1 x})'' + p(xe^{k_1 x})' + q(xe^{k_1 x}) = \\ &= (2k_1 e^{k_1 x} + xk_1^2 e^{k_1 x}) + p(e^{k_1 x} + xk_1 e^{k_1 x}) + q(xe^{k_1 x}) = \\ &= e^{k_1 x}(2k_1 + k_1^2 x + p + pxk_1 + qx) = e^{k_1 x}(x(k_1^2 + pk_1 + q) + (p + 2k_1)). \end{aligned}$$

Но $k_1^2 + pk_1 + q = 0$, т. к. k_1 есть корень уравнения (4.2); $p + 2k_1 = 0$, т. к. по условию $k_1 = k_2 = -\frac{p}{2}$.

Поэтому $y_2'' + py_2' + qy_2 = 0$, т. е. функция $y_2 = xe^{k_1 x}$ является решением уравнения (4.1).

Частные решения $y_1 = e^{k_1 x}$ и $y_2 = xe^{k_1 x}$ образуют фундаментальную систему решений: $W(x) = e^{2k_1 x} \neq 0$. Следовательно, в этом случае общее решение ЛОДУ (4.1) имеет вид

$$\boxed{y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 x e^{k_1 x}.} \tag{4.4}$$

Случай 3. Корни k_1 и k_2 уравнения (4.2) комплексные: $k_1 = \alpha + \beta i$, $k_2 = \alpha - \beta i$ $(D = \frac{p^2}{4} - q < 0,\ \alpha = -\frac{p}{2},\ \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}} > 0)$.

В этом случае частными решениями уравнения (4.1) являются функции $y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x}$ и $y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x}$. По формулам Эйлера (см. Часть 1, п. 27.3)

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \quad e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$$

имеем

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x} = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x, \\ y_2 &= e^{\alpha x} \cdot e^{-i\beta x} = e^{\alpha x}\cos\beta x - ie^{\alpha x}\sin\beta x. \end{aligned}$$

Найдем два действительных частных решения уравнения (4.1). Для этого составим две линейные комбинации решений y_1 и y_2:

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = e^{\alpha x}\cos\beta x = \widetilde{y}_1 \quad \text{и} \quad \frac{y_1 - y_2}{2i} = e^{\alpha x}\sin\beta x = \widetilde{y}_2.$$

Функции $\widetilde{y}_1$ и $\widetilde{y}_2$ являются решениями уравнения (4.1), что следует из свойств решений ЛОДУ второго порядка (см. теорему 3.2). Эти решения $\widetilde{y}_1$ и $\widetilde{y}_2$ образуют фундаментальную систему решений, так как $W(x) \neq 0$ (убедитесь самостоятельно!). Поэтому общее решение уравнения (4.1) запишется в виде $y = c_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + c_2 e^{\alpha x}\sin\beta x$, или

$$\boxed{y = e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x).} \tag{4.5}$$

Пример 4.2. Решить уравнение $y'' - 6y' + 25y = 0$.

Решение: Имеем: $k^2 - 6k + 25 = 0$, $k_1 = 3 + 4i$, $k_2 = 3 - 4i$. По формуле (4.5) получаем общее решение уравнения:

$$y = e^{3x}(c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x).$$



Таким образом, нахождение общего решения ЛОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами (4.1) сводится к нахождению корней характеристического уравнения (4.2) и использованию формул (4.3)–(4.5) общего решения уравнения (не прибегая к вычислению интегралов).

4.2. Интегрирование ЛОДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами

Задача нахождения общего решения *ЛОДУ n-го порядка* ($n > 2$) *с постоянными коэффициентами*

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \cdots + p_n y = 0, \tag{4.6}$$

где p_i, $i = \overline{1, n}$, — числа, решается аналогично случаю уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Сформулируем необходимые утверждения и рассмотрим примеры.

Частные решения уравнения (4.6) также ищем в виде $y = e^{kx}$, где k — постоянное число.

Характеристическим для уравнения (4.6) является алгебраическое уравнение n-го порядка вида

$$k^n + p_1 k^{n-1} + p_2 k^{n-2} + \cdots + p_{n-1} k + p_n = 0. \tag{4.7}$$

Уравнение (4.7) имеет, как известно, n корней (в их числе могут быть и комплексные). Обозначим их через $k_1, k_2, \ldots, k_n$.

Замечание. Не все из корней уравнения (4.7) обязаны быть различными. Так, в частности, уравнение $(k - 3)^2 = 0$ имеет два равных корня: $k_1 = k_2 = 3$. В этом случае говорят, что корень один ($k = 3$) и имеет *кратность* $m_k = 2$. Если кратность корня равна единице: $m_k = 1$, его называют *простым.*

Случай 1. Все корни уравнения (4.7) действительны и просты (различны). Тогда функции $y_1 = e^{k_1 x}$, $y_2 = e^{k_2 x}$, ..., $y_n = e^{k_n x}$ являются частными решениями уравнения (4.6) и образуют фундаментальную систему решений (линейно независимы). Поэтому общее решение уравнения (4.6) записывается в виде

$$\boxed{y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x} + \cdots + c_n e^{k_n x}.}$$

Пример 4.3. Найти общее решение уравнения $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$.

Решение: Характеристическое уравнение $k^3 - 2k^2 - k + 2 = 0$ имеет корни $k_1 = -1$, $k_2 = 1$, $k_3 = 2$. Следовательно, $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + c_3 e^{2x}$ — общее решение данного уравнения.

Случай 2. Все корни характеристического уравнения действительные, но не все простые (есть корни, имеющие кратность $m > 1$). Тогда каждому простому корню k соответствует одно частное решение вида e^{kx}, а каждому корню k кратности $m > 1$ соответствует m частных решений: e^{kx}, xe^{kx}, x^2e^{kx} $\ldots$, $x^{m-1}e^{kx}$.

Пример 4.4. Решить уравнение $y^{IV} - y''' - 3y'' + 5y' - 2y = 0$.

Решение: Характеристическое уравнение

$$k^4 - k^3 - 3k^2 + 5k - 2 = (k+2)(k-1)^3 = 0$$

имеет корни $k_1 = -2$, $k_2 = 1$, $k_3 = 1$, $k_4 = 1$. Следовательно,

$$y = c_1e^{-2x} + c_2e^x + c_3xe^x + c_4x^2e^x$$

— общее решение уравнения. ●

Случай 3. Среди корней уравнения (4.7) есть комплексно-сопряженные корни. Тогда каждой паре $\alpha \pm \beta i$ простых комплексно-сопряженных корней соответствует два частных решения $e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $e^{\alpha x}\sin\beta x$, а каждой паре $\alpha \pm \beta i$ корней кратности $m > 1$ соответствуют $2m$ частных решений вида

$$e^{\alpha x}\cos\beta x, x\cdot e^{\alpha x}\cos\beta x, \ldots, x^{m-1}\cdot e^{\alpha x}\cos\beta x;$$

$$e^{\alpha x}\sin\beta x, x\cdot e^{\alpha x}\sin\beta x, \ldots, x^{m-1}\cdot e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Эти решения, как можно доказать, образуют фундаментальную систему решений.

Пример 4.5. Решить уравнение $y^V + y^{IV} + 2y''' + 2y'' + y' + y = 0$.

Решение: Характеристическое уравнение

$$k^5 + k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k + 1 = (k+1)(k^4 + 2k^2 + 1) = 0$$

имеет корни $k_1 = -1$, $k_2 = i$, $k_3 = -i$, $k_4 = i$, $k_5 = -i$. Следовательно,

$$y = c_1e^{-x} + c_2\cdot\cos x + c_3\cdot\sin x + c_4x\cdot\cos x + c_5x\cdot\sin x$$

— общее решение уравнения. ●

§ 5. ЛИНЕЙНЫЕ НЕОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ (ЛНДУ)

5.1. Структура общего решения ЛНДУ второго порядка

Рассмотрим ЛНДУ второго порядка

$$\boxed{y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x),} \qquad (5.1)$$

где $a_1(x), a_2(x), f(x)$ — заданные, непрерывные на $(a;b)$ функции. Уравнение

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0, \qquad (5.2)$$

левая часть которого совпадает с левой частью ЛНДУ (5.1), называется ***соответствующим*** ему ***однородным уравнением***.

Теорема 5.1 (структура общего решения ЛНДУ). Общим решением y уравнения (5.1) является сумма его произвольного частного решения y^* и общего решения $\widehat{y} = c_1y_1 + c_2y_2$ соответствующего однородного уравнения (5.2), т. е.

$$y = y^* + \widehat{y}. \tag{5.3}$$

❑ Убедимся, что функция (5.3) — решение уравнения (5.1). Так как y^* есть решение уравнения (5.1), а $\widehat{y}$ — решение уравнения (5.2), то

$$(y^*)'' + a_1(x)(y^*)' + a_2(x)y^* = f(x) \quad \text{и} \quad (\widehat{y})'' + a_1(x)(\widehat{y})' + a_2(x)\widehat{y} = 0.$$

В таком случае имеем:

$$(y^* + \widehat{y})'' + a_1(x)(y^* + \widehat{y})' + a_2(x)(y^* + \widehat{y}) =$$
$$= \big((y^*)''+a_1(x)(y^*)'+a_2(x)y^*\big)+\big((\widehat{y})''+a_1(x)(\widehat{y})'+a_2(x)\widehat{y}\big) = f(x)+0 = f(x).$$

Это означает, что функция $(y^* + \widehat{y})$ является решением уравнения (5.1). Покажем теперь, что функция

$$y = y^* + c_1y_1 + c_2y_2 \tag{5.4}$$

является общим решением уравнения (5.1). Для этого надо доказать, что из решения (5.4) можно выделить единственное частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям

$$y(x_0) = y_0, \; y'(x_0) = y_0'. \tag{5.5}$$

Продифференцировав функцию (5.4) и подставив начальные условия (5.5) в функцию (5.4) и ее производную, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} c_1y_1(x_0) + c_2y_2(x_0) = y_0 - y^*(x_0), \\ c_1y_1'(x_0) + c_2y_2'(x_0) = y_0' - (y^*)'(x_0), \end{cases}$$

где $y_0 = y(x_0)$, $y_0' = y'(x_0)$, с неизвестными c_1 и c_2. Определителем этой системы является определитель Вронского $W(x_0)$ для функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ в точке $x = x_0$. Функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно независимы (образуют фундаментальную систему решений), т. е. $W(x_0) \neq 0$. Следовательно, система имеет единственное решение: $c_1 = c_1^0$ и $c_2 = c_2^0$.

Решение $y = y^* + c_1^0y_1(x) + c_2^0y_2(x)$ является частным решением уравнения (5.1), удовлетворяющим заданным начальным условиям (5.5). Теорема доказана. ■

5.2. Метод вариации произвольных постоянных

Рассмотрим ЛНДУ (5.1). Его общим решением является функция (5.3), т. е.

$$y = y^* + \widehat{y}.$$

Частное решение y^* уравнения (5.1) можно найти, если известно общее решение $\widehat{y}$ соответствующего однородного уравнения (5.2), *методом вариации произвольных постоянных* (метод Лагранжа), состоящим в следующем. Пусть $\widehat{y} = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ — общее решение уравнения (5.2).

Заменим в общем решении постоянные c_1 и c_2 неизвестными функциями $c_1(x)$ и $c_2(x)$ и подберем их так, чтобы функция

$$y^* = c_1(x)\cdot y_1(x) + c_2(x)\cdot y_2(x) \tag{5.6}$$

была решением уравнения (5.1). Найдем производную

$$(y^*)' = c_1'(x)y_1(x) + c_1(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2(x) + c_2(x)y_2'(x).$$

Подберем функции $c_1(x)$ и $c_2(x)$ так, чтобы

$$c_1'(x)\cdot y_1(x) + c_2'(x)\cdot y_2(x) = 0. \tag{5.7}$$

Тогда

$$(y^*)' = c_1(x)\cdot y_1'(x) + c_2(x)\cdot y_2'(x),$$
$$(y^*)'' = c_1'(x)\cdot y_1'(x) + c_1(x)\cdot y_1''(x) + c_2'(x)\cdot y_2'(x) + c_2(x)\cdot y_2''(x).$$

Подставляя выражение для y^*, $(y^*)'$ и $(y^*)''$ в уравнение (5.1), получим:

$$c_1'(x)\cdot y_1'(x) + c_1(x)\cdot y_1''(x) + c_2'(x)\cdot y_2'(x) + c_2(x)\cdot y_2''(x) +$$
$$+ a_1(x)\big[c_1(x)y_1'(x) + c_2(x)y_2'(x)\big] + a_2(x)\big[c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)\big] = f(x),$$

или

$$c_1(x)\cdot\big[y_1''(x) + a_1(x)\cdot y_1'(x) + a_2(x)\cdot y_1(x)\big] +$$
$$+ c_2(x)\big[y_2''(x) + a_1(x)y_2'(x) + a_2(x)y_2(x)\big] + c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = f(x).$$

Поскольку $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — решения уравнения (5.2), то выражения в квадратных скобках равны нулю, а потому

$$c_1'(x)\cdot y_1'(x) + c_2'(x)\cdot y_2'(x) = f(x). \tag{5.8}$$

Таким образом, функция (5.6) будет частным решением y^* уравнения (5.1), если функции $c_1(x)$ и $c_2(x)$ удовлетворяют системе уравнений (5.7) и (5.8):

$$\boxed{\begin{cases} c_1'(x)\cdot y_1(x) + c_2'(x)\cdot y_2(x) = 0, \\ c_1'(x)\cdot y_1'(x) + c_2'(x)\cdot y_2'(x) = f(x). \end{cases}} \tag{5.9}$$

Определитель системы $\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0$, так как это определитель Вронского для фундаментальной системы частных решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$ уравнения (5.2). Поэтому система (5.9) имеет единственное решение: $c_1'(x) = \varphi_1(x)$ и $c_2'(x) = \varphi_2(x)$, где $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — некоторые функции от x. Интегрируя эти функции, находим $c_1(x)$ и $c_2(x)$, а затем по формуле (5.6) составляем частное решение уравнения (5.1).



Пример 5.1. Найти общее решение уравнения $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$.

◯ Решение: Найдем общее решение $\widehat{y}$ соответствующего однородного уравнения $y'' + y = 0$. Имеем: $k^2 + 1 = 0$, $k_1 = i$, $k_2 = -i$. Следовательно, $\widehat{y} = c_1\cdot\cos x + c_2\cdot\sin x$. Найдем теперь частное решение y^* исходного

уравнения. Оно ищется в виде (5.6): $y^* = c_1(x) \cdot \cos x + c_2(x) \cdot \sin x$. Для нахождения $c_1(x)$ и $c_2(x)$ составляем систему уравнений вида (5.9):

$$\begin{cases} c_1'(x) \cdot \cos x + c_2'(x) \cdot \sin x = 0, \\ c_1'(x) \cdot (-\sin x) + c_2'(x) \cdot \cos x = \dfrac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

Решаем ее:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \frac{1}{\cos x} & \cos x \end{vmatrix} = -\operatorname{tg} x, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \frac{1}{\cos x} \end{vmatrix} = 1;$$

$$c_1'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\operatorname{tg} x, \quad c_1(x) = \int (-\operatorname{tg} x)\,dx = \ln|\cos x|;$$

$$c_2'(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 1, \quad c_2(x) = \int 1 \cdot dx = x.$$

Запишем частное решение данного уравнения: $y^* = \ln|\cos x| \cdot \cos x + x \cdot \sin x$. Следовательно, общее решение данного уравнения имеет вид

$$y = (\widehat{y} + y^*) = c_1 \cdot \cos x + c_2 \cdot \sin x + \cos x \cdot \ln|\cos x| + x \cdot \sin x. \quad ●$$

При нахождении частных решений ЛНДУ может быть полезной следующая теорема.

Теорема 5.2 (о наложении решений). Если правая часть уравнения (5.1) представляет собой сумму двух функций: $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, а y_1^* и y_2^* — частные решения уравнений $y'' + a_1(x) \cdot y' + a_2(x) \cdot y = f_1(x)$ и $y'' + a_1(x) \cdot y' + a_2(x) y = f_2(x)$ соответственно, то функция $y^* = y_1^* + y_2^*$ является решением данного уравнения.

❑ Действительно,

$$\begin{aligned} &(y_1^* + y_2^*)'' + a_1(x) \cdot (y_1^* + y_2^*)' + a_2(x) \cdot (y_1^* + y_2^*) = \\ &= \left((y_1^*)'' + a_1(x) \cdot (y_1^*)' + a_2(x) \cdot y_1^*\right) + \left((y_2^*)'' + a_1(x) \cdot (y_2^*)' + a_2(x) \cdot y_2^*\right) = \\ &= f_1(x) + f_2(x) = f(x). \quad ■ \end{aligned}$$

5.3. Интегрирование ЛНДУ второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида

Рассмотрим *ЛНДУ второго порядка с постоянными коэффициентами*, т. е. уравнение

$$\boxed{y'' + p \cdot y' + q \cdot y = f(x),} \tag{5.10}$$

где p и q — некоторые числа.

Согласно теореме 5.1, общее решение уравнения (5.10) представляет собой сумму общего решения $\widehat{y}$ соответствующего однородного уравнения

и частного решения y^* неоднородного уравнения. Частное решение уравнения (5.10) может быть найдено методом вариации произвольных постоянных (п. 5.2).

Для уравнений с постоянными коэффициентами (5.10) существует более простой способ нахождения y^*, если правая часть $f(x)$ уравнения (5.10) имеет так называемый «специальный вид»:

I. $f(x) = P_n(x) \cdot e^{\alpha x}$

или

II. $f(x) = e^{\alpha x} \cdot (P_n(x) \cdot \cos \beta x + Q_m(x) \cdot \sin \beta x)$.

Суть метода, называемого *методом неопределенных коэффициентов*, состоит в следующем: по виду правой части $f(x)$ уравнения (5.10) записывают ожидаемую форму частного решения с неопределенными коэффициентами, затем подставляют ее в уравнение (5.10) и из полученного тождества находят значения коэффициентов.

Случай 1. Правая часть (5.10) имеет вид $f(x) = P_n(x) \cdot e^{\alpha x}$, где $\alpha \in \mathbb{R}$, $P_n(x)$ — многочлен степени n. Уравнение (5.10) запишется в виде

$$\boxed{y'' + p \cdot y' + q \cdot y = P_n(x) \cdot e^{\alpha x}.} \tag{5.11}$$

В этом случае частное решение y^* ищем в виде:

$$\boxed{y^* = x^r \cdot Q_n(x) \cdot e^{\alpha x},} \tag{5.12}$$

где r — число, равное кратности α как корня характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$ (т. е. r — число, показывающее, сколько раз α является корнем уравнения $k^2 + pk + q = 0$), а $Q_n(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \cdots + A_n$ — многочлен степени n, записанный с неопределенными коэффициентами A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

❑ а) Пусть α не является корнем характеристического уравнения

$$k^2 + pk + q = 0,$$

т. е. $\alpha \neq k_{1,2}$. Следовательно,

$$r = 0, \quad y^* = Q_n(x) \cdot e^{\alpha x}, \quad (y^*)' = Q_n'(x) \cdot e^{\alpha x} + Q_n(x) \cdot e^{\alpha x} \cdot \alpha,$$
$$(y^*)'' = Q_n''(x) \cdot e^{\alpha x} + 2Q_n'(x) \cdot e^{\alpha x} \cdot \alpha + Q_n(x) \cdot e^{\alpha x} \cdot \alpha^2.$$

После подстановки функции y^* и ее производных в уравнение (5.11), сокращения на $e^{\alpha x}$, получим:

$$Q_n''(x) + (2\alpha + p)Q_n'(x) + (\alpha^2 + p\alpha + q) \cdot Q_n(x) = P_n(x). \tag{5.13}$$

Слева — многочлен степени n с неопределенными коэффициентами, справа — многочлен степени n, но с известными коэффициентами. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему $(n + 1)$ алгебраических уравнений для определения коэффициентов $A_0, A_1, \ldots, A_n$.

б) Пусть α является однократным (простым) корнем характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$, т. е. $\alpha = k_1 \neq k_2$.

В этом случае искать решение в форме $y^* = Q_n(x)e^{\alpha x}$ нельзя, т. к. $\alpha^2 + p\alpha + q = 0$, и уравнение (5.13) принимает вид

$$Q_n''(x) + (2\alpha + p) \cdot Q_n'(x) = P_n(x).$$

В левой части — многочлен степени $(n-1)$, в правой части — многочлен степени n. Чтобы получить тождество многочленов в решении y^*, нужно иметь многочлен степени $(n+1)$. Поэтому частное решение y^* следует искать в виде $y^* = x \cdot Q_n(x)e^{\alpha x}$ (в равенстве (5.12) положить $r = 1$).

в) Пусть α является двукратным корнем характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$, т. е. $\alpha = k_1 = k_2$. В этом случае $\alpha^2 + p\alpha + q = 0$ и $2\alpha + p = 0$, а поэтому уравнение (5.13) принимает вид $Q_n''(x) = P_n(x)$.

Слева стоит многочлен степени $n-2$. Понятно, чтобы иметь слева многочлен степени n, частное решение y^* следует искать в виде

$$y^* = x^2 Q_n(x)e^{\alpha x}$$

(в равенстве (5.12) положить $r = 2$). ■

Случай 2. Правая часть (5.10) имеет вид

$$f(x) = e^{\alpha x} \cdot (P_n(x) \cdot \cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x),$$

где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ — многочлены степени n и m соответственно, α и β — действительные числа. Уравнение (5.10) запишется в виде

$$\boxed{y'' + py' + qy = e^{\alpha x} \cdot \big(P_n(x) \cdot \cos\beta x + Q_m(x) \cdot \sin\beta x\big).} \tag{5.14}$$

Можно показать, что в этом случае частное решение y^* уравнения (5.14) следует искать в виде

$$\boxed{y^* = x^r \cdot e^{\alpha x} \cdot \big(M_l(x) \cdot \cos\beta x + N_l(x) \cdot \sin\beta x\big),} \tag{5.15}$$

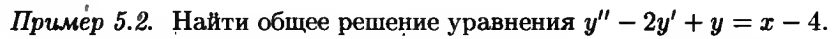
где r — число, равное кратности $\alpha + \beta i$ как корня характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$, $M_l(x)$ и $N_l(x)$ — многочлены степени l с неопределенными коэффициентами, l — наивысшая степень многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$, т. е. $l = \max(n, m)$.

Замечания.

1. После подстановки функции (5.15) в (5.14) приравнивают многочлены, стоящие перед одноименными тригонометрическими функциями в левой и правой частях уравнения.

2. Форма (5.15) сохраняется и в случаях, когда $P_n(x) \equiv 0$ или $Q_m(x) \equiv 0$.

3. Если правая часть уравнения (5.10) есть сумма функций вида I или II, то для нахождения y^* следует использовать теорему 5.2 о наложении решений.



Пример 5.2. Найти общее решение уравнения $y'' - 2y' + y = x - 4$.

Решение: Найдем общее решение $\widehat{y}$ ЛОДУ $y'' - 2y' + y = 0$. Характеристическое уравнение $k^2 - 2k + 1 = 0$ имеет корень $k_1 = 1$ кратности 2. Значит, $\widehat{y} = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot x \cdot e^x$. Находим частное решение исходного уравнения. В нем правая часть $x - 4 = (x-4) \cdot e^{0 \cdot x}$ есть формула вида $P_1(x) \cdot e^{0 \cdot x}$, причем $\alpha = 0$, не является корнем характеристического уравнения: $\alpha \neq k_1$. Поэтому, согласно формуле (5.12), частное решение y^* ищем в виде $y^* = Q_1(x) \cdot e^{0 \cdot x}$, т. е. $y^* = Ax + B$, где A и B — неопределенные коэффициенты. Тогда $(y^*)' = A$, $(y^*)'' = 0$. Подставив y^*, $(y^*)'$, $(y^*)''$ в исходное

уравнение, получим $-2A+Ax+B=x-4$, или $Ax+(-2A+B)=x-4$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} A=1, \\ -2A+B=-4. \end{cases}$$

Отсюда $A=1$, $B=-2$. Поэтому частное решение данного уравнения имеет вид $y^*=x-2$. Следовательно, $y=(\widehat{y}+y^*)=c_1e^x+c_2xe^x+x-2$ — искомое общее решение уравнения. ●

Пример 5.3. Решить уравнение $y''-4y'+13y=40\cdot\cos 3x$.

❍ Решение: Общее решение ЛНДУ имеет вид $y=\widehat{y}+y^*$. Находим решение однородного уравнения $\widehat{y}$: $y''-4y'+13y=0$. Характеристическое уравнение $k^2-4k+13=0$ имеет корни $k_1=2+3i$, $k_2=2-3i$. Следовательно, $\widehat{y}=e^{2x}\cdot(c_1\cdot\cos 3x+c_2\cdot\sin 3x)$.

Находим частное решение y^*. Правая часть ЛНДУ в нашем случае имеет вид $f(x)=e^{0\cdot x}\cdot(40\cos 3x+0\cdot\sin 3x)$. Так как $\alpha=0$, $\beta=3$, $\alpha+\beta i=3i$ не совпадает с корнем характеристического уравнения, то $r=0$. Согласно формуле (5.15), частное решение ищем в виде $y^*=A\cos 3x+B\sin 3x$. Подставляем y^* в исходное уравнение. Имеем: $(y^*)'=-3A\sin 3x+3B\cos 3x$, $(y^*)''=-9A\cos 3x-9B\sin 3x$. Получаем:

$$-9A\cos 3x-9B\sin 3x-4(-3A\sin 3x+3B\cos 3x)+ \\ +13(A\cos 3x+B\sin 3x)=40\cos 3x,$$

или

$$(-9A-12B+13A)\cos 3x+(-9B+12A+13B)\sin 3x=40\cos 3x+0\cdot\sin 3x.$$

Отсюда имеем:

$$\begin{cases} 4A-12B=40, \\ 12A+4B=0. \end{cases}$$

Следовательно, $A=1$, $B=-3$. Поэтому $y^*=\cos 3x-3\sin 3x$. И наконец, $y=e^{2x}(c_1\cdot\cos 3x+c_2\cdot\sin 3x)+\cos 3x-3\sin 3x$ — общее решение уравнения. ●

Пример 5.4. (*Для самостоятельного решения.*) Для предложенных дифференциальных уравнений получить вид частного решения:

а) $y''-3y'+2y=5+e^x$;
б) $y''-2y'+y=2$;
в) $y''+4y=\sin 2x+\cos 7x$;
г) $y''+y=5\cos 2x-x\sin 2x$;
д) $y''-3y'=x^2-1+\cos x$.

Ответы: а) $A+x\cdot B\cdot e^x$; б) A; в) $x(A\cos 2x+B\sin 2x)+C\cos 7x+D\sin 7x$; г) $(Ax+B)\cos 2x+(Cx+D)\sin 2x$; д) $x(Ax^2+Bx+C)+D\cos x+E\sin x$.

5.4. Интегрирование ЛНДУ n-го порядка ($n > 2$) с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида

Рассмотрим линейное неоднородное ДУ n-го ($n > 2$) порядка

$$y^{(n)} + a_1(x)\cdot y^{(n-1)} + a_2(x)\cdot y^{(n-2)} + \cdots + a_n(x)\cdot y = f(x),$$

где $a_1(x), a_2(x), ..., a_n(x)$, $f(x)$ — заданные непрерывные функции на $(a;b)$.

Соответствующее ему однородное уравнение имеет вид

$$y^{(n)} + a_1(x)\cdot y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)\cdot y = 0.$$

Теорема 5.3 (о структуре общего решения ЛНДУ n-го порядка). Общее решение y ЛНДУ n-го порядка равно сумме частного решения y^* неоднородного уравнения и общего решения $\widehat{y}$ соответствующего ему однородного уравнения, т. е. $y = y^* + \widehat{y}$.

Частное решение y^* ЛНДУ n-го порядка может быть найдено, если известно общее решение $\widehat{y}$ однородного уравнения, методом вариации произвольных постоянных. Оно ищется в виде

$$y^* = c_1(x)\cdot y_1(x) + c_2(x)\cdot y_2(x) + \cdots + c_n(x)\cdot y_n(x),$$

где $y_i(x)$, $i = \overline{1,n}$, — частные решения, образующие фундаментальную систему, однородного уравнения.

Система уравнений для нахождения неизвестных $c_i(x)$ имеет вид

$$\begin{cases} c_1'y_1 + c_2'y_2 + c_3'y_3 + \cdots + c_n'y_n = 0,\\ c_1'y_1' + c_2'y_2' + c_3'y_3' + \cdots + c_n'y_n' = 0,\\ c_1'y_1'' + c_2'y_2'' + c_3'y_3'' + \cdots + c_n'y_n'' = 0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ c_1'y_1^{(n-1)} + c_2'y_2^{(n-1)} + c_3'y_3^{(n-1)} + \cdots + c_n'y_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases}$$

Однако для ЛНДУ n-го порядка с *постоянными коэффициентами*, правая часть которого имеет специальный вид, частное решение y^* может быть найдено методом неопределенных коэффициентов.

Метод подбора частного решения y^* уравнения

$$y^{(n)} + p_1y^{(n-1)} + \cdots + p_ny = f(x),$$

где p_i — числа, а правая часть $f(x)$ имеет специальный вид, описанный в п. 5.3 для случая $n = 2$, переносится без всякого изменения и на случай уравнения, имеющего порядок $n > 2$.



Пример 5.5. Решить уравнение $y^{IV} - y' = 2x$.

○ Решение: Находим $\widehat{y}$:

$$k^4 - k = 0, \quad k(k-1)\cdot(k^2+k+1) = 0, \quad k_1 = 0,\ k_2 = 1,\ k_{3,4} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$\widehat{y} = c_1 + c_2e^x + e^{-\frac{1}{2}x}\left(c_3\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_4\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

Находим y^*: $f(x) = 2x \left(= e^{0\cdot x} \cdot P_1(x)\right)$, $r = 1$, $y^* = x(Ax + B) = Ax^2 + Bx$, отсюда

$$(y^*)' = 2Ax + B, \quad (y^*)'' = 2A, \quad (y^*)''' = 0, \quad (y^*)^{IV} = 0.$$

Тогда $-(2Ax + B) = 2x$. Отсюда $A = -1$, $B = 0$ и получаем $y^* = -x^2$. Следовательно, функция

$$y = (\widehat{y} + y^*) = c_1 + c_2 e^x + e^{-\frac{1}{2}x}\left(c_3 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_4 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) - x^2$$

является общим решением уравнения. ●

§ 6. СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

6.1. Основные понятия

Для решения многих задач математики, физики, техники (задач динамики криволинейного движения; задач электротехники для нескольких электрических цепей; определения состава системы, в которой протекают несколько последовательных химических реакций I порядка; отыскания векторных линий поля и других) нередко требуется несколько функций. Нахождение этих функций может привести к нескольким ДУ, образующим систему.

Системой ДУ называется совокупность ДУ, каждое из которых содержит независимую переменную, искомые функции и их производные.

Общий вид системы ДУ первого порядка, содержащей n искомых функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$, следующий:

$$\begin{cases} F_1(x; y_1; y_2; \ldots; y_n; y_1'; y_2'; \ldots; y_n') = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_n(x; y_1; y_2; \ldots; y_n; y_1'; y_2'; \ldots; y_n') = 0. \end{cases}$$

Система ДУ первого порядка, разрешенных относительно производной, т. е. система вида

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x; y_1; y_2; \ldots; y_n), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x; y_1; y_2; \ldots; y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x; y_1; y_2; \ldots; y_n), \end{cases} \tag{6.1}$$

называется ***нормальной системой ДУ***. При этом предполагается, что число уравнений равно числу искомых функций.

Замечание. Во многих случаях системы уравнений и уравнения высших порядков можно привести к нормальной системе вида (6.1).

Так, система трех ДУ второго порядка

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = F_1(x; y; z; t; x'; y'; z'), \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = F_2(x; y; z; t; x'; y'; z'), \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} = F_3(x; y; z; t; x'; y'; z'), \end{cases}$$

описывающая движение точки в пространстве, путем введения новых переменных: $\frac{dx}{dt} = u$, $\frac{dy}{dt} = v$, $\frac{dz}{dt} = w$, приводится к нормальной системе ДУ:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = u, \\ \frac{dy}{dt} = v, \\ \frac{dz}{dt} = w, \\ \frac{du}{dt} = F_1(x; y; z; t; u; v; w), \\ \frac{dv}{dt} = F_2(x; y; z; t; u; v; w), \\ \frac{dw}{dt} = F_3(x; y; z; t; u; v; w). \end{cases}$$

Уравнение третьего порядка $y''' = f(x; y; y'; y'')$ путем замены $y' = p$, $y'' = p' = q$ сводится к нормальной системе ДУ

$$\begin{cases} y' = p, \\ p' = q, \\ q' = f(x; y; p; q). \end{cases}$$

Из сказанного выше следует полезность изучения именно нормальных систем.

Решением системы (6.1) называется совокупность из n функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$, удовлетворяющих каждому из уравнений этой системы.

Начальные условия для системы (6.1) имеют вид

$$y_1(x_0) = y_1^0, \; y_2(x_0) = y_2^0, \ldots, y_n(x_0) = y_n^0. \qquad (6.2)$$

Задача Коши для системы (6.1) ставится следующим образом: найти решение системы (6.1), удовлетворяющее начальным условиям (6.2).

Условия существования и единственности решения задачи Коши описывает следующая теорема, приводимая здесь без доказательства.

Теорема 6.1 (Коши). Если в системе (6.1) все функции $f_i(x; y_1; \ldots, y_n)$ непрерывны вместе со всеми своими частными производными по y_i в некоторой области D ($(n+1)$-мерного пространства), то в каждой точке $M_0(x_0; y_1^0; y_2^0; \ldots; y_n^0)$ этой области существует, и притом единственное, решение $y_1 = \varphi_1(x)$, $y_2 = \varphi_2(x)$, ..., $y_n = \varphi_n(x)$ системы, удовлетворяющее начальным условиям (6.2).

Меняя в области D точку M_0 (т. е. начальные условия), получим бесчисленное множество решений, которое можно записать в виде решения, зависящего от n произвольных постоянных:

$$y_1 = \varphi_1(x; c_1; c_2; \ldots; c_n), \ldots, y_n = \varphi_n(x; c_1; c_2; \ldots; c_n).$$

Это решение является *общим*, если по заданным начальным условиям (6.2) можно однозначно определить постоянные $c_1, c_2, \ldots, c_n$ из системы уравнений

$$\begin{cases} \varphi_1(x; c_1; c_2; \ldots; c_n) = y_1^0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_n(x; c_1; c_2; \ldots; c_n) = y_n^0. \end{cases}$$

Решение, получающееся из общего при конкретных значениях постоянных $c_1, c_2, \ldots, c_n$, называется *частным решением системы* (6.1).

6.2. Интегрирование нормальных систем

Одним из основных методов интегрирования нормальной системы ДУ является *метод сведения системы к одному ДУ высшего порядка*. (Обратная задача — переход от ДУ к системе — рассмотрена выше на примере.) Техника этого метода основана на следующих соображениях.

Пусть задана нормальная система (6.1). Продифференцируем по x любое, например первое, уравнение:

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot \frac{dy_1}{dx} + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \cdot \frac{dy_2}{dx} + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \cdot \frac{dy_n}{dx}.$$

Подставив в это равенство значения производных $\frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \ldots, \frac{dy_n}{dx}$ из системы (6.1), получим

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot f_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \cdot f_2 + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \cdot f_n,$$

или, коротко,

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = F_2(x; y_1; y_2; \ldots; y_n).$$

Продифференцировав полученное равенство еще раз и заменив значения производных $\frac{dy_1}{dx}, \ldots, \frac{dy_n}{dx}$ из системы (6.1), получим

$$\frac{d^3y_1}{dx^3} = F_3(x; y_1; y_2; \ldots; y_n).$$

Продолжая этот процесс (дифференцируем — подставляем — получаем), находим:

$$\frac{d^ny_1}{dx^n} = F_n(x; y_1; y_2; \ldots; y_n).$$

Соберем полученные уравнения в систему:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x; y_1; y_2; \ldots; y_n), \\ \frac{d^2y_1}{dx^2} = F_2(x; y_1; y_2; \ldots; y_n), \\ \frac{d^3y_1}{dx^3} = F_3(x; y_1; y_2; \ldots; y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{d^ny_1}{dx^n} = F_n(x; y_1; y_2; \ldots; y_n). \end{cases} \tag{6.3}$$

Из первых $(n-1)$ уравнений системы (6.3) выразим функции $y_2, y_3, \ldots, y_n$ через x, функцию y_1 и ее производные $y_1', y_1'', \ldots, y_1^{(n-1)}$. Получим:

$$\begin{cases} y_2 = \psi_2(x; y_1; y_1'; \ldots; y_1^{(n-1)}), \\ y_3 = \psi_3(x; y_1; y_1'; \ldots; y_1^{(n-1)}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = \psi_n(x; y_1; y_1'; \ldots; y_1^{(n-1)}). \end{cases} \tag{6.4}$$

Найденные значения $y_2, y_3, \ldots, y_n$ подставим в последнее уравнение системы (6.3). Получим одно ДУ n-го порядка относительно искомой функции y_1: $\frac{d^n y_1}{dx} = \Phi(x; y_1; y_1'; \ldots; y_1^{(n-1)})$. Пусть его общее решение есть

$$y_1 = \varphi_1(x; c_1; c_2; \ldots; c_n).$$

Продифференцировав его $(n-1)$ раз и подставив значения производных $y_1', y_1'', \ldots, y_1^{(n-1)}$ в уравнения системы (6.4), найдем функции $y_2, y_3, \ldots, y_n$:

$$y_2 = \varphi_2(x; c_1; c_2; \ldots; c_n), \ldots, y_n = \varphi_n(x; c_1; c_2; \ldots; c_n).$$

Пример 6.1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 4y - 3z, \\ \frac{dz}{dx} = 2y - 3z. \end{cases}$$

○ Решение: Продифференцируем первое уравнение: $y'' = 4y' - 3z'$. Подставляем $z' = 2y - 3z$ в полученное равенство: $y'' = 4y' - 3(2y - 3z)$, $y'' - 4y' + 6y = 9z$. Составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} y' = 4y - 3z, \\ y'' - 4y' + 6y = 9z. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы выражаем z через y и y':

$$z = \frac{4y - y'}{3}. \tag{6.5}$$

Подставляем значение z во второе уравнение последней системы:

$$y'' - 4y' + 6y = \frac{9(4y - y')}{3},$$

т. е. $y'' - y' - 6y = 0$. Получили одно ЛОДУ второго порядка. Решаем его: $k^2 - k - 6 = 0$, $k_1 = -2$, $k_2 = 3$ и $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{3x}$ — общее решение уравнения. Находим функцию z. Значения y и $y' = (c_1 e^{-2x} + c_2 e^{3x})' = -2c_1 e^{-2x} + 3c_2 e^{3x}$ подставляем в выражение z через y и y' (формула (6.5)). Получим:

$$z = 2c_1 e^{-2x} + \frac{1}{3} c_2 e^{3x}.$$

Таким образом, общее решение данной системы уравнений имеет вид $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{3x}$, $z = 2c_1 e^{-2x} + \frac{1}{3} c_2 e^{3x}$. ●

Замечание. Систему уравнений (6.1) можно решать ***методом интегрируемых комбинаций***. Суть метода состоит в том, что посредством арифметических операций из уравнений данной системы образуют так называемые интегрируемые комбинации, т. е. легко интегрируемые уравнения относительно новой неизвестной функции.

Проиллюстрируем технику этого метода на следующем примере.

Пример 6.2. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + 1, \\ \frac{dy}{dt} = x + 1. \end{cases}$$

○ Решение: Сложим почленно данные уравнения: $x' + y' = x + y + 2$, или $(x + y)' = (x + y) + 2$. Обозначим $x + y = z$. Тогда имеем $z' = z + 2$. Решаем полученное уравнение: $\frac{dz}{z+2} = dt$, $\ln(z + 2) - \ln c_1 = t$, $\frac{z+2}{c_1} = e^t$, $z + 2 = c_1 e^t$, или $x + y = c_1 e^t - 2$.

Получили так называемый *первый интеграл системы*. Из него можно выразить одну из искомых функций через другую, тем самым уменьшить на единицу число искомых функций. Например, $y = c_1 e^t - 2 - x$. Тогда первое уравнение системы примет вид

$$x' = c_1 e^t - 2 - x + 1, \quad \text{т.е.} \quad x' + x = c_1 e^t - 1.$$

Найдя из него x (например, с помощью подстановки $x = uv$), найдем и y.

Замечание. Данная система «позволяет» образовать еще одну интегрируемую комбинацию: $x' - y' = y - x$, т. е. $(x - y)' = -(x - y)$. Положив $x - y = p$, имеем: $p' = -p$, или $\frac{dp}{p} = -dt$, $\ln p - \ln c_2 = -t$, $p = c_2 e^{-t}$, или $x - y = c_2 e^{-t}$. Имея два первых интеграла системы, т. е. $x + y = c_1 e^t - 2$ и $x - y = c_2 e^{-t}$, легко найти (складывая и вычитая первые интегралы), что $x = \frac{1}{2}c_1 e^t + \frac{1}{2}c_2 e^{-t} - 1$, $y = \frac{1}{2}c_1 e^t - \frac{1}{2}c_2 e^{-t} - 1$. ●

6.3. Системы линейных ДУ с постоянными коэффициентами

Рассмотрим еще один метод интегрирования нормальной системы уравнений (6.1) в случае, когда она представляет собой *систему линейных однородных ДУ с постоянными коэффициентами*, т. е. систему вида

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n. \end{cases}$$

Для простоты ограничимся рассмотрением системы трех уравнений с тремя неизвестными функциями y_1, y_2 и y_3:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3, \\ \frac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3, \\ \frac{dy_3}{dx} = a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3, \end{cases} \tag{6.6}$$

где все коэффициенты a_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ — постоянные.

Будем искать частное решение системы (6.6) в виде

$$y_1 = \alpha \cdot e^{kx}, \ y_2 = \beta \cdot e^{kx}, \ y_3 = \gamma \cdot e^{kx}, \tag{6.7}$$

где α, β, γ, k — постоянные, которые надо подобрать (найти) так, чтобы функции (6.7) удовлетворяли системе (6.6).

Подставив эти функции в систему (6.6) и сократив на множитель $e^{kx} \neq 0$, получим:

$$\begin{cases} \alpha k = a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma, \\ \beta k = a_{21}\alpha + a_{22}\beta + a_{23}\gamma, \\ \gamma k = a_{31}\alpha + a_{32}\beta + a_{33}\gamma, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (a_{11} - k)\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma = 0, \\ a_{21}\alpha + (a_{22} - k)\beta + a_{23}\gamma = 0, \\ a_{31}\alpha + a_{32}\beta + (a_{33} - k)\gamma = 0. \end{cases} \tag{6.8}$$

Систему (6.8) можно рассматривать как однородную систему трех алгебраических уравнений с тремя неизвестными α, β, γ. Чтобы эта система имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы определитель системы был равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - k & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - k \end{vmatrix} = 0. \tag{6.9}$$

Уравнение (6.9) называется ***характеристическим уравнением*** системы (6.6). Раскрыв определитель, получим уравнение третьей степени относительно k. Рассмотрим возможные случаи.

Случай 1. Корни характеристического уравнения действительны и различны: k_1, k_2, k_3. Для каждого корня k_i $(i = 1, 2, 3)$ напишем систему (6.8) и определим коэффициенты α_i, β_i, γ_i (один из коэффициентов можно считать равным единице). Таким образом, получаем:

для корня k_1 частное решение системы (6.6): $y_1^{(1)} = \alpha_1 e^{k_1 x}$, $y_2^{(1)} = \beta_1 e^{k_1 x}$, $y_3^{(1)} = \gamma_1 e^{k_1 x}$;

для корня k_2 — $y_1^{(2)} = \alpha_2 e^{k_2 x}$, $y_2^{(2)} = \beta_2 e^{k_2 x}$, $y_3^{(2)} = \gamma_2 e^{k_2 x}$;

для корня k_3 — $y_1^{(3)} = \alpha_3 e^{k_3 x}$, $y_2^{(3)} = \beta_3 e^{k_3 x}$, $y_3^{(3)} = \gamma_3 e^{k_3 x}$.

Можно показать, что эти функции образуют фундаментальную систему, общее решение системы (6.6) записывается в виде

$$\begin{aligned} y_1 &= c_1\alpha_1 e^{k_1 x} + c_2\alpha_2 e^{k_2 x} + c_3\alpha_3 e^{k_3 x}, \\ y_2 &= c_1\beta_1 e^{k_1 x} + c_2\beta_2 e^{k_2 x} + c_3\beta_3 e^{k_3 x}, \\ y_3 &= c_1\gamma_1 e^{k_1 x} + c_2\gamma_2 e^{k_2 x} + c_3\gamma_3 e^{k_3 x}. \end{aligned} \tag{6.10}$$

Пример 6.3. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_1 - y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = -4y_1 + y_2. \end{cases}$$

❍ Решение: Характеристическое уравнение (6.9) данной системы имеет вид

$$\begin{vmatrix} 1 - k & -1 \\ -4 & 1 - k \end{vmatrix} = 0,$$

или $1 - 2k + k^2 - 4 = 0$, $k^2 - 2k - 3 = 0$, $k_1 = -1$, $k_2 = 3$. Частные решения данной системы ищем в виде $y_1^{(1)} = \alpha_1 e^{k_1 x}$, $y_2^{(1)} = \beta_1 e^{k_1 x}$ и $y_1^{(2)} = \alpha_2 e^{k_2 x}$, $y_2^{(2)} = \beta_2 e^{k_2 x}$. Найдем α_i и β_i $(i = 1, 2)$.

При $k_1 = -1$ система (6.8) имеет вид

$$\begin{cases} (1 - (-1))\alpha_1 - \beta_1 = 0, \\ -4\alpha_1 + (1 - (-1))\beta_1 = 0, \end{cases}$$

т. е.

$$\begin{cases} 2\alpha_1 - \beta_1 = 0, \\ -4\alpha_1 + 2\beta_1 = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет бесчисленное множество решений. Положим $\alpha_1 = 1$, тогда $\beta_1 = 2$. Получаем частные решения

$$y_1^{(1)} = e^{-x} \quad \text{и} \quad y_2^{(1)} = 2e^{-x}.$$

При $k_2 = 3$ система (6.8) имеет вид

$$\begin{cases} -2\alpha_2 - \beta_2 = 0, \\ -4\alpha_2 - 2\beta_2 = 0. \end{cases}$$

Положим $\alpha_2 = 1$, тогда $\beta_2 = -2$. Значит, корню $k_2 = 3$ соответствуют частные решения:

$$y_1^{(2)} = e^{3x} \quad \text{и} \quad y_2^{(2)} = -2e^{3x}.$$

Общее решение исходной системы, согласно формуле (6.10), запишется в виде: $y_1 = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x}$, $y_2 = 2c_1 e^{-x} - 2c_2 e^{3x}$. ●

Случай 2. Корни характеристического уравнения различные, но среди них есть комплексные: $k_1 = a + ib$, $k_2 = a - ib$, k_3. Вид частных решений в этой ситуации определяют так же, как и в случае 1.

Замечание. Вместо полученных частных решений можно взять их линейные комбинации (п. 4.1, случай 3), применяя формулы Эйлера; в результате получим два действительных решения, содержащих функции вида $e^{ax} \cdot \cos bx$, $e^{ax} \cdot \sin bx$. Или, выделяя действительные и мнимые части в найденных комплексных частных решениях, получим два действительных частных решения (можно показать, что они тоже являются решениями уравнения). При этом понятно, что комплексно-сопряженный корень $k_2 = a - ib$ не даст новых линейно независимых действительных решений.

Пример 6.4. Найти частное решение системы

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_1 + y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = -y_1 + y_2 - y_3, \\ \dfrac{dy_3}{dx} = 3y_2 + y_3, \end{cases}$$

удовлетворяющее начальным условиям: $y_1(0) = 7$, $y_2(0) = 2$, $y_3(0) = 1$.

Решение: Составляем и решаем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 1-k & 1 & 0 \\ -1 & 1-k & -1 \\ 0 & 3 & 1-k \end{vmatrix} = 0,$$

$$(1-k)\cdot\begin{vmatrix} 1-k & -1 \\ 3 & 1-k \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1-k \end{vmatrix} = 0,$$

$$(1-k)(k^2-2k+4)-(k-1)=0, \quad (1-k)(k^2-2k+5)=0,$$

$$k_1 = 1, \quad k_2 = 1+2i, \quad k_3 = 1-2i.$$

Для $k_1 = 1$ получаем:

$$\begin{cases} 0\cdot\alpha_1+\beta_1+0\cdot\gamma_1=0, \\ -\alpha_1+0\cdot\beta_1-\gamma_1=0, \\ 0\cdot\alpha_1+3\beta_1+0\cdot\gamma_1=0 \end{cases}$$

(см. (6.8)). Отсюда находим: $\beta_1 = 0$, $\alpha_1 = 1$ (положили), $\gamma_1 = -1$. Частное решение системы: $y_1^{(1)} = e^x$, $y_2^{(1)} = 0$, $y_3^{(1)} = -e^x$.

Для $k_2 = 1+2i$ получаем (см. (6.8)):

$$\begin{cases} -2i\alpha_2+\beta_2=0, \\ -\alpha_2-2i\beta_2-\gamma_2=0, \\ 3\beta_2-2i\gamma_2=0. \end{cases}$$

Отсюда находим: $\alpha_2 = 1$ (положили), $\beta_2 = 2i$, $\gamma_2 = 3$. Частное комплексное решение системы: $y_1^{(2)} = e^{(1+2i)x}$, $y_2^{(2)} = 2ie^{(1+2i)x}$, $y_3^{(2)} = 3e^{(1+2i)x}$.

В найденных решениях выделим действительную (Re) и мнимую (Im) части:

$$y_1^{(2)} = e^{(1+2i)x} = e^x(\cos 2x + i\sin 2x),$$

$$\operatorname{Re} y_1^{(2)} = e^x\cos 2x, \quad \operatorname{Im} y_1^{(2)} = e^x \sin 2x;$$

$$y_2^{(2)} = 2ie^{(1+2i)x} = e^x(2i\cos 2x - 2\sin 2x),$$

$$\operatorname{Re} y_2^{(2)} = -2e^x\sin 2x, \quad \operatorname{Im} y_2^{(2)} = 2e^x\cos 2x;$$

$$y_3^{(2)} = 3e^{(1+2i)x} = e^x(3\cos 2x + i3\sin 2x),$$

$$\operatorname{Re} y_3^{(2)} = 3e^x\cos 2x, \quad \operatorname{Im} y_3^{(2)} = 3e^x\sin 2x.$$

Как уже отмечено, корень $k_3 = 1-2i$ приведет к этим же самым решениям.

Таким образом, общее решение системы имеет вид

$$y_1 = c_1e^x + c_2e^x\cos 2x + c_3e^x\sin 2x,$$

$$y_2 = c_1\cdot 0 - 2c_2e^x\sin 2x + 2c_3e^x\cos 2x,$$

$$y_3 = -c_1e^x + 3c_2e^x\cos 2x + 3c_3e^x\sin 2x.$$

Выделим частное решение системы. При заданных начальных условиях получаем систему уравнений для определения постоянных c_1, c_2, c_3:

$$\begin{cases} 7 = c_1+c_2+0, \\ 2 = 0-0+2c_3, \\ 1 = -c_1+3c_2+0, \end{cases} \implies c_1 = 5,\ c_2 = 2,\ c_3 = 1.$$

Следовательно, искомое частное решение имеет вид

$$y_1 = 5e^x + 2e^x \cos 2x + e^x \sin 2x,$$
$$y_2 = -4e^x \sin 2x + 2e^x \cos 2x,$$
$$y_3 = -5e^x + 6e^x \cos 2x + 3e^x \sin 2x.$$

Случай 3. Характеристическое уравнение имеет корень k кратности m ($m = 2, 3$). Решение системы, соответствующее кратному корню, следует искать в виде:

а) если $m = 2$, то $y_1 = (A+Bx)e^{kx}$, $y_2 = (C+Dx)e^{kx}$, $y_3 = (E+Fx)e^{kx}$;

б) если $m = 3$, то $y_1 = (A + Bx + Cx^2)e^{kx}$, $y_2 = (D + Ex + Fx^2)e^{kx}$, $y_3 = (G + Hx + Nx^2)e^{kx}$.

Это решение зависит от m произвольных постоянных. Постоянные $A, B, C, \ldots, N$ определяются методом неопределенных коэффициентов. Выразив все коэффициенты через m из них, полагаем поочередно один из них равным единице, а остальные равными нулю. Получим m линейно независимых частных решений системы (6.6).

Пример 6.5. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_1 - y_2 + y_3, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = y_1 + y_2 - y_3, \\ \dfrac{dy_3}{dx} = -y_2 + 2y_3. \end{cases}$$

Решение: Составляем и решаем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1-k & -1 & 1 \\ 1 & 1-k & -1 \\ 0 & -1 & 2-k \end{vmatrix} = 0,$$

$(1-k)(2-2k-k+k^2-1) - 1(-2+k+1) = 0$, $k_1 = 2$, $k_2 = k_3 = 1$. Корню $k_1 = 2$ соответствует система (см. (6.8)):

$$\begin{cases} -\alpha_1 - \beta_1 + \gamma_1 = 0, \\ \alpha_1 - \beta_1 - \gamma_1 = 0, \\ -\beta_1 = 0, \end{cases} \implies \begin{cases} \beta_1 = 0, \\ \alpha_1 - \gamma_1 = 0. \end{cases}$$

Полагая $\gamma_1 = 1$, находим $\alpha_1 = 1$. Получаем одно частное решение исходной системы: $y_1^{(1)} = e^{2x}$, $y_2^{(1)} = 0$, $y_3^{(1)} = e^{2x}$.

Двукратному корню $k = k_2 = k_3 = 1$ ($m = 2$) соответствует решение вида $y_1^{(2,3)} = (A + Bx)e^x$, $y_2^{(2,3)} = (C + Dx)e^x$, $y_3^{(2,3)} = (E + Fx)e^x$. Подставляем эти выражения (решения) в уравнения исходной системы:

$$\begin{cases} B \cdot e^x + (A + Bx)e^x = (A + Bx)e^x - (C + Dx)e^x + (E + Fx)e^x, \\ D \cdot e^x + (C + Dx)e^x = (A + Bx)e^x + (C + Dx)e^x - (E + Fx)e^x, \\ F \cdot e^x + (E + Fx)e^x = -(C + Dx)e^x + 2(E + Fx)e^x, \end{cases}$$

или, после сокращения на $e^x \neq 0$ и группировки,

$$\begin{cases} (D-F)x + B + C - E = 0, \\ (B-F)x + A - D - E = 0, \\ (D-F)x + C + F - E = 0. \end{cases}$$

Эти равенства тождественно выполняются лишь в случае, когда

$$\begin{cases} D - F = 0, \\ B - F = 0, \\ B + C - E = 0, \\ A - D - E = 0, \\ C + F - E = 0. \end{cases}$$

Выразим все коэффициенты через два из них ($m = 2$), например через A и B. Из второго уравнения имеем $F = B$. Тогда, с учетом первого уравнения, получаем $D = B$. Из четвертого уравнения находим $E = A - D$, т. е. $E = A - B$. Из третьего уравнения: $C = E - B$, т. е. $C = A - B - B$, или $C = A - 2B$. Коэффициенты A и B — произвольные.

Полагая $A = 1$, $B = 0$, находим: $C = 1$, $D = 0$, $E = 1$, $F = 0$.

Полагая $A = 0$, $B = 1$, находим: $C = -2$, $D = 1$, $E = -1$, $F = 1$.

Получаем два линейно независимых частных решения, соответствующих двукратному корню $k = 1$:

$$y_1^{(2)} = e^x, \quad y_2^{(2)} = e^x, \quad y_3^{(2)} = e^x \quad \text{и}$$

$$y_1^{(3)} = xe^x, \quad y_2^{(3)} = (-2 + x)e^x, \quad y_3^{(3)} = (-1 + x)e^x.$$

Записываем общее решение исходной системы:

$$y_1 = c_1 e^{2x} + c_2 e^x + c_3 x e^x,$$
$$y_2 = c_2 e^x + c_3(x - 2)e^x,$$
$$y_3 = c_1 e^{2x} + c_2 e^x + c_3(x - 1)e^x.$$

●

Глава II. ДВОЙНЫЕ И ТРОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Лекции 8–10

§ 7. ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

7.1. Основные понятия и определения

Обобщением определённого интеграла на случай функций двух переменных является так называемый двойной интеграл.

Пусть в замкнутой области D плоскости Oxy задана непрерывная функция $z = f(x;y)$. Разобьем область D на n «элементарных областей» D_i $(i = \overline{1,n})$, площади которых обозначим через ΔS_i, а диаметры (наибольшее расстояние между точками области) — через d_i (см. рис. 3).

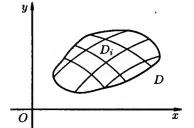


Рис. 3.

В каждой области D_i выберем произвольную точку $M_i(x_i;y_i)$, умножим значение $f(x_i;y_i)$ функции в этой точке на ΔS_i и составим сумму всех таких произведений:

$$f(x_1;y_1)\Delta S_1 + f(x_2;y_2)\Delta S_2 + \cdots + f(x_n;y_n)\Delta S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i;y_i)\Delta S_i. \quad (7.1)$$

Эта сумма называется *интегральной суммой* функции $f(x;y)$ в области D.

Рассмотрим предел интегральной суммы (7.1), когда n стремится к бесконечности таким образом, что $\max d_i \to 0$. Если этот предел существует и не зависит ни от способа разбиения области D на части, ни от выбора точек в них, то он называется *двойным интегралом* от функции $f(x;y)$ по области D и обозначается $\iint\limits_D f(x;y)\,dx\,dy$ $\left(\text{или } \iint\limits_D f(x;y)\,dS\right)$.



Таким образом, ***двойной интеграл*** определяется равенством

$$\iint\limits_D f(x;y)\,dx\,dy = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\max d_i \to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i;y_i)\cdot\Delta S_i. \quad (7.2)$$



В этом случае функция $f(x;y)$ называется ***интегрируемой в области*** D; D — ***область интегрирования***; x и y — ***переменные интегрирования***; $dx\,dy$ (или dS) — ***элемент площади***.

Для всякой ли функции $f(x;y)$ существует двойной интеграл? На этот вопрос отвечает следующая теорема, которую мы приведем здесь без доказательства.

Теорема 7.1 (достаточное условие интегрируемости функции). Если функция $z = f(x;y)$ непрерывна в замкнутой области D, то она интегрируема в этой области.

Замечания.

1. Далее будем рассматривать только функции, непрерывные в области интегрирования, хотя двойной интеграл может существовать не только для непрерывных функций.

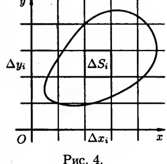


Рис. 4.

2. Из определения двойного интеграла следует, что для интегрируемой в области D функции предел интегральных сумм существует и не зависит от способа разбиения области. Таким образом, мы можем разбивать область D на площадки прямыми, параллельными координатным осям (см. рис. 4). При этом $\Delta S_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$, равенство (7.2) можно записать в виде

$$\iint\limits_D f(x;y)\,dx\,dy = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\max d_i \to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i;y_i)\cdot\Delta x_i\cdot\Delta y_i.$$

7.2. Геометрический и физический смысл двойного интеграла

Рассмотрим две задачи, приводящие к двойному интегралу.

Объем цилиндрического тела

Рассмотрим тело, ограниченное сверху поверхностью $z = f(x;y) \geqslant 0$, снизу — замкнутой областью D плоскости Oxy, с боков — цилиндрической поверхностью, образующая которой параллельна оси Oz, а направляющей служит граница области D (см. рис. 5). Такое тело называется *цилиндрическим.* Найдем его объем V. Для этого разобьем область D (проекция поверхности $z = f(x;y)$ на плоскость Oxy) произвольным образом на n областей D_i, площади которых равны ΔS_i ($i = \overline{1,n}$). Рассмотрим цилиндрические столбики с основаниями D_i, ограниченные сверху кусками поверхности $z = f(x;y)$ (на рис. 5 один из них выделен). В своей совокупности они составляют тело V. Обозначив объем столбика с основанием D_i через ΔV_i, получим

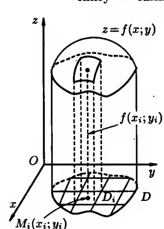


Рис. 5.

$$V = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i.$$

Возьмем на каждой площадке D_i произвольную точку $M_i(x_i;y_i)$ и заменим каждый столбик прямым цилиндром с тем же основанием D_i и высотой $z_i = f(x_i;y_i)$. Объем этого цилиндра приближенно равен объему ΔV_i цилиндрического столбика, т. е. $\Delta V_i \approx f(x_i;y_i)\cdot\Delta S_i$. Тогда получаем:

$$V = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i;y_i)\Delta S_i. \tag{7.3}$$

Это равенство тем точнее, чем больше число n и чем меньше размеры «элементарных областей» D_i. Естественно принять предел суммы (7.3) при условии, что число площадок D_i неограниченно увеличивается ($n \to \infty$), а каждая площадка стягивается в точку ($\max d_i \to 0$), за объем V цилиндрического тела, т. е. $V = \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ (\max d_i \to 0)}} \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i; y_i)\Delta S_i$, или, согласно равенству (7.2),

$$V = \iint\limits_D f(x; y)\, dx\, dy. \tag{7.4}$$

Итак, *величина двойного интеграла от неотрицательной функции равна объему цилиндрического тела*. В этом состоит геометрический смысл двойного интеграла.

Масса плоской пластинки

Требуется найти массу m плоской пластинки D, зная, что ее поверхностная плотность $\gamma = \gamma(x; y)$ есть непрерывная функция координат точки $(x; y)$. Разобьем пластинку D на n элементарных частей D_i ($i = \overline{1, n}$), площади которых обозначим через ΔS_i. В каждой области D_i возьмем произвольную точку $M_i(x_i; y_i)$ и вычислим плотность в ней: $\gamma(x_i; y_i)$.

Если области D_i достаточно малы, то плотность в каждой точке $(x; y) \in D_i$ мало отличается от значения $\gamma(x_i; y_i)$. Считая приближенно плотность в каждой точке области D_i постоянной, равной $\gamma(x_i; y_i)$, можно найти ее массу m_i: $m_i \approx \gamma(x_i; y_i) \cdot \Delta S_i$. Так как масса m всей пластинки D равна $m = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i$, то для ее вычисления имеем приближенное равенство

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} \gamma(x_i; y_i) \cdot \Delta S_i. \tag{7.5}$$

Точное значение массы получим как предел суммы (7.5) при условии $n \to \infty$ и $\max d_i \to 0$:

$$m = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\max d_i \to 0)}} \sum_{i=1}^{n} \gamma(x_i; y_i)\Delta S_i,$$

или, согласно равенству (7.2),

$$m = \iint\limits_D \gamma(x; y)\, dx\, dy. \tag{7.6}$$

Итак, двойной интеграл от функции $\gamma(x; y)$ численно равен массе пластинки, если подынтегральную функцию $\gamma(x; y)$ считать плотностью этой пластинки в точке $(x; y)$. В этом состоит физический смысл двойного интеграла.

7.3. Основные свойства двойного интеграла

Можно заметить, что процесс построения интеграла в области D дословно повторяет уже знакомую нам процедуру определения интеграла функции одной переменной на отрезке (см. Часть 1, § 35). Аналогичны и свойства этих интегралов и их доказательства (см. Часть 1, § 38). Поэтому

перечислим основные свойства двойного интеграла, считая подынтегральные функции интегрируемыми.

1. $\iint\limits_D c \cdot f(x;y)\,dx\,dy = c \cdot \iint\limits_D f(x;y)\,dx\,dy$, c — const.

2. $\iint\limits_D (f_1(x;y) \pm f_2(x;y))\,dx\,dy = \iint\limits_D f_1(x;y)\,dx\,dy \pm \iint\limits_D f_2(x;y)\,dx\,dy$.

3. Если область D разбить линией на две области D_1 и D_2 такие, что $D_1 \bigcup D_2 = D$, а пересечение D_1 и D_2 состоит лишь из линии, их разделяющей (см. рис. 6), то

$$\iint\limits_D f(x;y)\,dx\,dy = \iint\limits_{D_1} f(x;y)\,dx\,dy + \iint\limits_{D_2} f(x;y)\,dx\,dy.$$

Рис. 6.

4. Если в области D имеет место неравенство $f(x;y) \geqslant 0$, то и $\iint\limits_D f(x;y)\,dx\,dy \geqslant 0$. Если в области D функции $f(x;y)$ и $\varphi(x;y)$ удовлетворяют неравенству $f(x;y) \geqslant \varphi(x;y)$, то и $\iint\limits_D f(x;y)\,dx\,dy \geqslant \iint\limits_D \varphi(x;y)\,dx\,dy$.

5. $\iint\limits_D dS = S$, так как $\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta S_i = S$.

6. Если функция $f(x;y)$ непрерывна в замкнутой области D, площадь которой S, то $mS \leqslant \iint\limits_D f(x;y)\,dx\,dy \leqslant MS$, где m и M — соответственно наименьшее и наибольшее значения подынтегральной функции в области D.

7. Если функция $f(x;y)$ непрерывна в замкнутой области D, площадь которой S, то в этой области существует такая точка $(x_0;y_0)$, что $\iint\limits_D f(x;y)\,dx\,dy = f(x_0;y_0) \cdot S$. Величину

$$f(x_0;y_0) = \frac{1}{S} \cdot \iint\limits_D f(x;y)\,dx\,dy$$

называют *средним значением функции $f(x;y)$ в области D*.

7.4. Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах

Покажем, что вычисление двойного интеграла сводится к последовательному вычислению двух определенных интегралов.

Пусть требуется вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x;y)\,dx\,dy$, где функция $f(x;y) \geqslant 0$ непрерывна в области D. Тогда, как это было показано в п. 7.2, двойной интеграл выражает объем цилиндрического те-

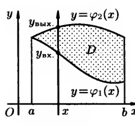


Рис. 7.

ла, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x;y)$. Найдем этот объем, используя метод параллельных сечений. Ранее (см. Часть 1, (41.6)) было показано, что

$$V = \int_a^b S(x)\,dx,$$

где $S(x)$ — площадь сечения плоскостью, перпендикулярной оси Ox, а $x = a$, $x = b$ — уравнения плоскостей, ограничивающих данное тело.

Положим сначала, что область D представляет собой криволинейную трапецию, ограниченную прямыми $x = a$ и $x = b$ и кривыми $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$; причем функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ непрерывны и таковы, что $\varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x)$ для всех $x \in [a;b]$ (см. рис. 7). Такая область называется *правильной в направлении оси Oy*: любая прямая, параллельная оси Oy, пересекает границу области не более чем в двух точках.

Построим сечение цилиндрического тела плоскостью, перпендикулярной оси Ox: $x = \text{const}$, где $x \in [a;b]$.

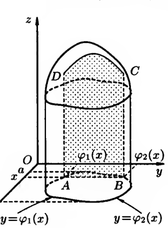


Рис. 8.

В сечении получим криволинейную трапецию $ABCD$, ограниченную линиями $z = f(x;y)$, где $x = \text{const}$, $z = 0$, $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$ (см. рис. 8).

Площадь $S(x)$ этой трапеции находим с помощью определенного интеграла

$$S(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x;y)\,dy.$$

Теперь, согласно методу параллельных сечений, искомый объем цилиндрического тела может быть найден так:

$$V = \int_a^b S(x)\,dx = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x;y)\,dy \right) dx.$$

С другой стороны, в п. 7.2 было доказано, что объем цилиндрического тела определяется как двойной интеграл от функции $f(x;y) \geqslant 0$ по области D. Следовательно,

$$V = \iint_D f(x;y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x;y)\,dy \right) dx.$$

Это равенство обычно записывается в виде

$$\boxed{\iint_D f(x;y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \cdot \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x;y)\,dy.} \qquad (7.7)$$

Формула (7.7) представляет собой способ вычисления двойного интеграла в декартовых координатах. Правую часть формулы (7.7) называют *двукратным* (или *повторным*) *интегралом* от функции $f(x;y)$ по области D. При этом $\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x;y)\,dy$ называется *внутренним* интегралом.

Для вычисления двукратного интеграла сначала берем внутренний интеграл, считая x постоянным, затем берем внешний интеграл, т. е. результат первого интегрирования интегрируем по x в пределах от a до b.

Если же область D ограничена прямыми $y = c$ и $y = d$ $(c < d)$, кривыми $x = \psi_1(y)$ и $x = \psi_2(y)$, причем $\psi_1(y) \leqslant \psi_2(y)$ для всех $y \in [c;d]$, т. е. область D — *правильная в направлении оси* Ox, то, рассекая тело плоскостью $y = \text{const}$, аналогично получим:

$$\iint\limits_D f(x;y)\,dx\,dy = \int\limits_c^d dy \cdot \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x;y)\,dx. \tag{7.8}$$

Здесь, при вычислении внутреннего интеграла, считаем y постоянным.

Замечания.

1. Формулы (7.7) и (7.8) справедливы и в случае, когда $f(x;y) < 0$, $(x;y) \in D$.

2. Если область D правильная в обоих направлениях, то двойной интеграл можно вычислять как по формуле (7.7), так и по формуле (7.8).

3. Если область D не является правильной ни «по x», ни «по y», то для сведения двойного интеграла к повторным ее следует разбить на части, правильные в направлении оси Ox или оси Oy.

4. Полезно помнить, что внешние пределы в двукратном интеграле всегда постоянны, а внутренние, как правило, переменные.

Пример 7.1. Вычислить $\iint\limits_D (x+2y)\,dx\,dy$, где область D ограничена линиями $y = x^2$, $y = 0$, $x + y - 2 = 0$.

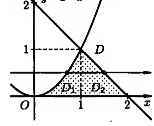


Рис. 9.

○ Решение: На рисунке 9 изображена область интегрирования D. Она правильная в направлении оси Ox. Для вычисления данного двойного интеграла воспользуемся формулой (7.8):

$$\iint\limits_D (x+2y)\,dx\,dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{2-y} (x+2y)\,dx =$$

$$= \int\limits_0^1 dy\left(\frac{x^2}{2} + 2yx\right)\Big|_{\sqrt{y}}^{2-y} = \int\limits_0^1 \left(\frac{(2-y)^2}{2} + 4y - 2y^2 - \frac{y}{2} - 2y^{\frac{3}{2}}\right)dy =$$

$$= \left(\frac{(y-2)^3}{6} + \frac{7\cdot y^2}{2\cdot 2} - 2\cdot\frac{y^3}{3} - 2\cdot 2\cdot\frac{y^{\frac{5}{2}}}{5}\right)\Big|_0^1 = -\frac{1}{6} + \frac{8}{6} + \frac{7}{4} - \frac{2}{3} - \frac{4}{5} = \frac{29}{20} = 1{,}45.$$

Отметим, что для вычисления данного двойного интеграла можно воспользоваться формулой (7.7). Но для этого область D следует разбить на две области: D_1 и D_2. Получаем:

$$\iint\limits_D (x+2y)\,dx\,dy = \iint\limits_{D_1} (x+2y)\,dx\,dy + \iint\limits_{D_2} (x+2y)\,dx\,dy =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} (x+2y)\,dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} (x+2y)\,dy =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \cdot (xy+y^2)\Big|_0^{x^2} + \int\limits_1^2 dx \cdot (xy+y^2)\Big|_0^{2-x} =$$

$$= \int\limits_0^1 (x^3+x^4)\,dx + \int\limits_1^2 (2x-x^2+(2-x)^2)\,dx =$$

$$= \left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1 + \left(x^2-\frac{x^3}{3}+\frac{(x-2)^3}{3}\right)\Big|_1^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right) + \left(4-1-\frac{8}{3}+\frac{1}{3}+0+\frac{1}{3}\right) = \frac{9}{20}+3-2 = 1{,}45.$$

Ответ, разумеется, один и тот же. ●

7.5. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах

Для упрощения вычисления двойного интеграла часто применяют метод подстановки (как это делалось и при вычислении определенного интеграла), т. е. вводят новые переменные под знаком двойного интеграла.

Определим преобразование независимых переменных x и y (замену переменных) как

$$x = \varphi(u;v) \quad \text{и} \quad y = \psi(u;v). \tag{7.9}$$

Если функции (7.9) имеют в некоторой области D^* плоскости Ouv непрерывные частные производные первого порядка и отличный от нуля определитель

$$I(u;v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}, \tag{7.10}$$

а функция $f(x;y)$ непрерывна в области D, то справедлива *формула замены переменных в двойном интеграле*:

$$\iint\limits_D f(x;y)\,dx\,dy = \iint\limits_{D^*} f\big(\varphi(u;v);\psi(u;v)\big)\cdot |I(u;v)|\,du\,dv. \tag{7.11}$$

Функциональный определитель (7.10) называется *определителем Якоби* или *якобианом* (Г. Якоби — немецкий математик). Доказательство формулы (7.11) не приводим.

Рассмотрим частный случай замены переменных, часто используемый при вычислении двойного интеграла, а именно замену декартовых координат x и y полярными координатами r и φ.

В качестве u и v возьмем полярные координаты r и φ. Они связаны с декартовыми координатами формулами $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ (см. Часть 1, п. 9.1).

Правые части в этих равенствах — непрерывно дифференцируемые функции. Якобиан преобразования определяется из (7.10) как

$$I(r;\varphi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r.$$

Формула замены переменных (7.11) принимает вид:

$$\iint\limits_D f(x;y)\,dx\,dy = \iint\limits_{D^*} f(r\cos\varphi; r\sin\varphi)\cdot r\cdot dr\,d\varphi, \qquad (7.12)$$

где D^* — область в полярной системе координат, соответствующая области D в декартовой системе координат.

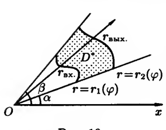


Рис. 10.

Для вычисления двойного интеграла в полярных координатах применяют то же правило сведения его к двукратному интегралу. Так, если область D^* имеет вид, изображенный на рисунке 10 (ограничена лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$, где $\alpha < \beta$, и кривыми $r = r_1(\varphi)$ и $r = r_2(\varphi)$, где $r_1(\varphi) \leqslant r_2(\varphi)$, т. е. область D^* *правильная*: луч, выходящий из полюса, пересекает ее границу не более чем в двух точках), то правую часть формулы (7.12) можно записать в виде

$$\iint\limits_{D^*} r\cdot f(r\cos\varphi; r\sin\varphi)\,dr\,d\varphi = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} r\cdot f(r\cos\varphi; r\sin\varphi)\,dr. \qquad (7.13)$$

Внутренний интеграл берется при постоянном φ.

Замечания.

1. Переход к полярным координатам полезен, когда подынтегральная функция имеет вид $f(x^2 + y^2)$; область D есть круг, кольцо или часть таковых.

2. На практике переход к полярным координатам осуществляется путем замены $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $dx\,dy = r\,dr\,d\varphi$; уравнения линий, ограничивающих область D, также преобразуются к полярным координатам. Преобразование области D в область D^* не выполняют, а, совместив декартову и полярную системы координат, находят нужные пределы интегрирования по r и φ (исследуя закон изменения r и φ точки $(r;\varphi)$ при ее отождествлении с точкой $(x;y)$ области D).



Пример 7.2. Вычислить $\iint\limits_D \sqrt{9 - x^2 - y^2}\,dx\,dy$, где область D — круг $x^2 + y^2 \leqslant 9$.

○ Решение: Применив формулу (7.12), перейдем к полярным координатам:

$$\iint\limits_D \sqrt{9-x^2-y^2}\,dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_D \sqrt{9-(r\cos\varphi)^2-(r\sin\varphi)^2}\cdot r\,dr\,d\varphi =$$

$$= \iint\limits_D r\cdot\sqrt{9-r^2}\,dr\,d\varphi.$$

Рис. 11.

Область D в полярной системе координат определяется неравенствами (см. рис. 11) $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant r \leqslant 3$. Заметим: область D — круг — преобразуется в область D^* — прямоугольник. Поэтому, согласно формуле (7.13), имеем:

$$\iint\limits_D r\cdot\sqrt{9-r^2}\,dr\,d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^3 r\cdot\sqrt{9-r^2}\,dr =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^3 (9-r^2)^{\frac{1}{2}}\cdot d(9-r^2) = -\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{(9-r^2)^{\frac{3}{2}}\cdot 2}{3}\right)\Bigg|_0^3 =$$

$$= -\frac{1}{3}\int\limits_0^{2\pi} (0-27)\,d\varphi = 9\varphi\Big|_0^{2\pi} = 18\pi. \quad \bullet$$

7.6. Приложения двойного интеграла

Приведем некоторые примеры применения двойного интеграла.

Объем тела

Как уже показано (п. 7.2), объем цилиндрического тела находится по формуле

$$\boxed{V = \iint\limits_D f(x;y)\,dx\,dy,}$$

где $z = f(x;y)$ — уравнение поверхности, ограничивающей тело сверху.

Площадь плоской фигуры

Если положить в формуле (7.4) $f(x;y) = 1$, то цилиндрическое тело «превратится» в прямой цилиндр с высотой $H = 1$. Объем такого цилиндра, как известно, численно равен площади S основания D. Получаем формулу для вычисления площади S области D:

$$\boxed{S = \iint\limits_D dx\,dy,}$$

или, в полярных координатах,

$$\boxed{S = \iint\limits_D r\cdot dr\,d\varphi.}$$

Масса плоской фигуры

Как уже показано (п. 7.2), масса плоской пластинки D с переменной плотностью $\gamma = \gamma(x; y)$ находится по формуле

$$\boxed{m = \iint\limits_D \gamma(x; y)\, dx\, dy.}$$

Статические моменты и координаты центра тяжести плоской фигуры

Статические моменты фигуры D относительно осей Ox и Oy (см. Часть 1, п. 41.6) могут быть вычислены по формулам

$$S_x = \iint\limits_D y \cdot \gamma(x; y)\, dx\, dy \quad \text{и} \quad S_y = \iint\limits_D x \cdot \gamma(x; y)\, dx\, dy;$$

а координаты центра масс фигуры — по формулам

$$x_c = \frac{S_y}{m} \quad \text{и} \quad y_c = \frac{S_x}{m}.$$

Моменты инерции плоской фигуры

Моментом инерции материальной точки массы m относительно оси l называется произведение массы m на квадрат расстояния d точки до оси, т. е. $M_l = m \cdot d^2$. Моменты инерции плоской фигуры относительно осей Ox и Oy могут быть вычислены по формулам:

$$M_x = \iint\limits_D y^2 \cdot \gamma(x; y)\, dx\, dy, \qquad M_y = \iint\limits_D x^2 \cdot \gamma(x; y)\, dx\, dy.$$

Момент инерции фигуры относительно начала координат — по формуле $M_O = M_x + M_y$.

Замечание. Приведенными примерами не исчерпывается применение двойного интеграла. Далее мы встретим приложение двойного интеграла к вычислению площадей поверхностей фигур (п. 11.3).

Пример 7.3. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2-z+1=0$ и $x^2+y^2+3z-7=0$.

Рис. 12.

Решение: Данное тело ограничено двумя параболоидами (см. рис. 12). Решая систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z - 1, \\ x^2 + y^2 = -3z + 7, \end{cases}$$

находим уравнение линии их пересечения: $x^2 + y^2 = 1$, $z = 2$.

Искомый объем равен разности объемов двух цилиндрических тел с одним основанием (круг $x^2+y^2 \leqslant 1$) и ограниченных сверху соответственно поверхностями $z = \frac{1}{3}(7 - x^2 - y^2)$ и $z = 1 + x^2 + y^2$.

Используя формулу (7.4), имеем

$$V = V_1 - V_2 = \iint\limits_D \frac{1}{3}(7 - x^2 - y^2)\, dx\, dy - \iint\limits_D (1 + x^2 + y^2)\, dx\, dy.$$

Переходя к полярным координатам, находим:

$$V = \frac{1}{3}\iint\limits_D (7-r^2)r\cdot dr\,d\varphi - \iint\limits_D (1+r^2)r\cdot dr\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{3}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 (7r - r^3)\,dr - \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 (r + r^3)\,dr =$$

$$= \frac{1}{3}\Big(\frac{7}{2}-\frac{1}{4}\Big)\cdot\varphi\Big|_0^{2\pi} - \Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\Big)\cdot\varphi\Big|_0^{2\pi} = \frac{13}{12}\cdot 2\pi - \frac{3}{4}\cdot 2\pi = \frac{2}{3}\pi.$$ ●

Пример 7.4. Найти массу, статические моменты S_x и S_y и координаты центра тяжести фигуры, лежащей в первой четверти, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ и координатными осями (см. рис. 13). Поверхностная плотность в каждой точке фигуры пропорциональна произведению координат точки.

Рис. 13.

❍ Решение: По формуле (7.6) находим массу пластинки. По условию, $\gamma = \gamma(x;y) = k\cdot xy$, где k — коэффициент пропорциональности.

$$m = \iint\limits_D kxy\,dx\,dy = k\int\limits_0^2 x\cdot dx \int\limits_0^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} y\,dy = \frac{k}{2}\int\limits_0^2 x\,dx\cdot y^2\Big|_0^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} =$$

$$= \frac{k}{2}\cdot\frac{1}{4}\int\limits_0^2 x(4-x^2)\,dx = \frac{k}{8}\Big(2x^2-\frac{x^4}{4}\Big)\Big|_0^2 = \frac{k}{2}.$$

Находим статические моменты пластинки:

$$S_x = \iint\limits_D y\cdot kxy\,dx\,dy = k\int\limits_0^2 x\,dx \int\limits_0^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} y^2\,dy = \cdots = \frac{4}{15}k,$$

$$S_y = \iint\limits_D x\cdot kxy\,dx\,dy = k\int\limits_0^2 x^2\,dx \int\limits_0^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} y\,dy = \cdots = \frac{8}{15}k.$$

Находим координаты центра тяжести пластинки, используя формулы $x_c = \frac{S_y}{m}$ и $y_c = \frac{S_y}{m}$: $x_c = \frac{16}{15}$, $y_c = \frac{8}{15}$. ●

§ 8. ТРОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

8.1. Основные понятия

Обобщением определенного интеграла на случай функции трех переменных является так называемый «тройной интеграл».

Теория тройного интеграла аналогична теории двойного интеграла. Поэтому изложим ее в несколько сокращенном виде.

3*

Пусть в замкнутой области V пространства $Oxyz$ задана непрерывная функция $u = f(x;y;z)$. Разбив область V сеткой поверхностей на n частей V_i ($i = \overline{1,n}$) и выбрав в каждой из них произвольную точку $M_i(x_i;y_i;z_i)$, составим интегральную сумму $\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i;y_i;z_i)\Delta V_i$ для функции $f(x;y;z)$ по области V (здесь ΔV_i — объем элементарной области V_i).

Если предел интегральной суммы существует при неограниченном увеличении числа n таким образом, что каждая «элементарная область» V_i стягивается в точку (т. е. диаметр области d_i стремится к нулю, т. е. $d_i \to 0$), то его называют ***тройным интегралом*** от функции $u = f(x;y;z)$ по области V и обозначают

$$\iiint\limits_V f(x;y;z)\cdot dx\,dy\,dz \quad \left(\text{или } \iiint\limits_V f(x;y;z)\,dv\right).$$

Таким образом, по определению, имеем:

$$\iiint\limits_V f(x;y;z)\cdot dx\,dy\,dz = \lim_{\substack{n\to\infty\\(\max d_i\to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i;y_i;z_i)\Delta V_i = \iiint\limits_V f(x;y;z)\,dv. \tag{8.1}$$

Здесь $dv = dx\,dy\,dz$ — элемент объема.

Теорема 8.1 (существования). Если функция $u = f(x;y;z)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области V, то предел интегральной суммы (8.1) при $n \to \infty$ и $\max d_i \to 0$ существует и не зависит ни от способа разбиения области V на части, ни от выбора точек $M_i(x_i;y_i;z_i)$ в них.

Тройной интеграл обладает теми же свойствами, что и двойной интеграл:

1. $\iiint\limits_V c\cdot f(x;y;z)\,dv = c\cdot \iiint\limits_V f(x;y;z)\,dv$, c — const.

2. $\iiint\limits_V (f_1(x;y;z)\pm f_2(x;y;z))\,dv = \iiint\limits_V f_1(x;y;z)\,dv \pm \iiint\limits_V f_2(x;y;z))\,dv$.

3. $\iiint\limits_V f(x;y;z)\,dv = \iiint\limits_{V_1} f(x;y;z)\,dv + \iiint\limits_{V_2} f(x;y;z)\,dv$, если $V = V_1 \bigcup V_2$, а пересечение V_1 и V_2 состоит из границы, их разделяющей.

4. $\iiint\limits_V f(x;y;z)\,dv \geqslant 0$, если в области V функция $f(x;y;z) \geqslant 0$. Если в области интегрирования $f(x;y;z) \geqslant \varphi(x;y;z)$, то и $\iiint\limits_V f(x;y;z)\,dv \geqslant \iiint\limits_V \varphi(x;y;z)\,dv$.

5. $\iiint\limits_V dv = V$, так как в случае $f(x;y;z) = 1$ любая интегральная сумма имеет вид $\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta V_i = V$ и численно равна объему тела.

6. Оценка тройного интеграла:

$$m \cdot V \leqslant \iiint\limits_V f(x;y;z)\,dv \leqslant M \cdot V,$$

где m и M — соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x;y;z)$ в области V.

7. Теорема о среднем значении: если функция $f(x;y;z)$ непрерывна в замкнутой области V, то в этой области существует такая точка $M_0(x_0;y_0;z_0)$, что

$$\iiint\limits_V f(x;y;z)\,dv = f(x_0;y_0;z_0) \cdot V,$$

где V — объем тела.

8.2. Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах

В декартовых координатах вычисление тройного интеграла сводится к последовательному вычислению трех определенных интегралов.

Пусть областью интегрирования V является тело, ограниченное снизу поверхностью $z = z_1(x;y)$, сверху — поверхностью $z = z_2(x;y)$, причем $z_1(x;y)$ и $z_2(x;y)$ $(z_1(x;y) \leqslant z_2(x;y))$ — непрерывные функции в замкнутой области D, являющейся проекцией тела на плоскость Oxy (см. рис. 14). Будем считать область V — *правильной в направлении оси* Oz: любая прямая, параллельная оси Oz, пересекает границу области не более чем в двух точках. Тогда для любой непрерывной в области V функции $f(x;y;z)$ имеет место формула

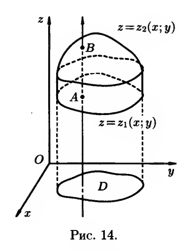


Рис. 14.

$$\iiint\limits_V f(x;y;z)\,dv = \iint\limits_D \Bigg(\int\limits_{z_1(x;y)}^{z_2(x;y)} f(x;y;z)\,dz\Bigg) ds, \qquad (8.2)$$

сводящая вычисление тройного интеграла к вычислению двойного интеграла от однократного (доказательство формулы (8.2) не приводим). При этом сначала вычисляется внутренний интеграл по переменной z при постоянных x и y в пределах изменения z. Нижней границей интеграла является аппликата точки A — точки входа прямой, параллельной оси Oz в область V, т. е. $z = z_1(x;y)$; верхней границей — аппликата точки B — точки выхода прямой из области V, т. е. $z = z_2(x;y)$. Результат вычисления этого интеграла есть функция двух переменных: x и y.

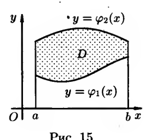


Рис. 15.

Если область D ограничена линиями $x = a$, $x = b$ $(a < b)$, $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$, где $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — непрерывные на отрезке $[a, b]$ функции, причем $\varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x)$ (см. рис. 15), то, переходя

от двойного интеграла по области D к повторному, получаем формулу

$$\iiint\limits_V f(x;y;z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x;y)}^{z_2(x;y)} f(x;y;z)\,dz, \qquad (8.3)$$

по которой вычисляется тройной интеграл в декартовых координатах.

Замечания.

1. Если область V более сложная, чем рассмотренная, то ее следует разбить на конечное число таких областей (правильных), к которым можно применить формулу (8.3).

2. Порядок интегрирования в формуле (8.3), при определенных условиях, может быть иным.

Пример 8.1. Вычислить

$$\iiint\limits_V (x+z)\,dx\,dy\,dz,$$

где V ограничена плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=1$, $x+y+z=2$ (рис. 16).

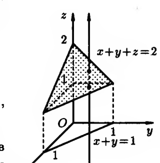


Рис. 16.

Решение: Область V является правильной в направлении оси Oz (как, заметим, и в направлении осей Ox и Oy). Ее проекция на плоскость Oxy является правильной в направлении оси Oy (и оси Ox). Согласно формуле (8.3), имеем:

$$\iiint\limits_V (x+z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_1^{2-x-y} (x+z)\,dz =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \cdot \left(xz + \frac{z^2}{2}\right)\Big|_1^{2-x-y} =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} \left(2x - x^2 - xy - x + \frac{(2-x-y)^2}{2} - \frac{1}{2}\right) dy =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \left(xy - x^2y - x\frac{y^2}{2} - \frac{(2-x-y)^3}{6} - \frac{1}{2}y\right)\Big|_0^{1-x} =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(x - x^2 - x^2 + x^3 - \frac{x(1-x)^2}{2} - \frac{1}{6} + \frac{(2-x)^3}{6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x\right) dx =$$

$$= \left(\frac{3}{2}\cdot\frac{x^2}{2} - 2\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - 2\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right) - \frac{2}{3}\cdot x - \frac{(2-x)^4}{24}\right)\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{24} - \frac{2}{3} - \frac{1}{24} + \frac{16}{24} = \frac{1}{4}.$$

8.3. Замена переменных в тройном интеграле. Вычисление тройного интеграла в цилиндрических и сферических координатах

При вычислении тройного интеграла, как и двойного, часто применяется метод подстановки, т. е. совершается преобразование переменных.

Пусть совершена подстановка $x=\varphi(u;v;w)$, $y=\psi(u;v;w)$, $z=\chi(u;v;w)$. Если эти функции имеют в некоторой области V^* пространства $Ouvw$ непрерывные частные производные и отличный от нуля определитель

$$I(u;v;w)=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix},$$

то справедлива *формула замены переменных* в тройном интеграле:

$$\iiint\limits_V f(x;y;z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint\limits_{V^*} f(\varphi(u;v;w);\psi(u;v;w);\chi(u;v;w))\cdot|I(u;v;w)|\,du\,dv\,dw. \quad (8.4)$$

Здесь $I(u;v;w)$ — определитель Якоби, или якобиан преобразования (примем без доказательства).

Для вычисления тройного интеграла часто используют так называемые цилиндрические координаты.

Положение точки $M(x;y;z)$ в пространстве $Oxyz$ можно определить заданием трех чисел r, φ, z, где r — длина радиуса-вектора проекции точки M на плоскость Oxy, φ — угол, образованный этим радиусом-вектором с осью Ox, z — аппликата точки M (см. рис. 17).

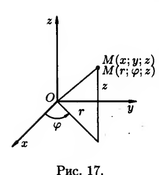


Рис. 17.

Эти три числа (r, φ, z) называются *цилиндрическими координатами* точки M.

Цилиндрические координаты точки связаны с ее декартовыми координатами следующими соотношениями:

$$\boxed{x=r\cdot\cos\varphi, \quad y=r\cdot\sin\varphi, \quad z=z}$$

$$(r\geqslant 0,\ \varphi\in[0;2\pi],\ z\in\mathbb{R}).$$

Возьмем в качестве u, v, w цилиндрические координаты r, φ, z и вычислим якобиан преобразования:

$$I(r;\varphi;z)=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r\geqslant 0.$$

Формула замены переменных (8.4) принимает вид

$$\iiint\limits_V f(x;y;z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{V^*} f(r\cos\varphi;r\sin\varphi;z)r\,dr\,d\varphi\,dz. \quad (8.5)$$

Таким образом, вычисление тройного интеграла приводится к интегрированию по r, по φ и по z аналогично тому, как это делается в декартовых координатах.

Замечание. К цилиндрическим координатам бывает удобно перейти в случае, если область интегрирования образована цилиндрической поверхностью.

Пример 8.2. Вычислить $\iiint\limits_V z \cdot dx\,dy\,dz$, где V — область, ограниченная верхней частью конуса $x^2 + y^2 = z^2$ и плоскостью $z = 1$.

Решение: На рис. 18 изображена область интегрирования V. Вычислим интеграл путем перехода к цилиндрическим координатам: $x = r \cdot \cos\varphi$, $y = r \cdot \sin\varphi$, $z = z$. Здесь $dx\,dy\,dz = r \cdot dr\,d\varphi\,dz$. Уравнение конуса примет вид $r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = z^2$, т. е. $z = r$. Уравнение окружности $x^2 + y^2 = 1$ (границы области D) запишется так: $r = 1$. Новые переменные изменяются в следующих пределах: r — от 0 до 1, φ — от 0 до 2π, а z — от r до 1 (прямая, параллельная оси Oz, пересекающая область D, входит в конус $z = r$ и выходит из него на высоте $z = 1$).

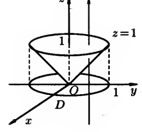


Рис. 18.

Таким образом, согласно формуле (8.5), получаем:

$$\iiint\limits_V z\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_V z \cdot r \cdot dr\,d\varphi\,dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r\,dr \int\limits_r^1 z\,dz =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r\,dr \cdot \frac{z^2}{2}\Big|_r^1 = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r \cdot \Big(\frac{1}{2} - \frac{r^2}{2}\Big)dr =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \cdot \Big(\frac{r^2}{4} - \frac{r^4}{8}\Big)\Big|_0^1 = \frac{1}{8}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{8} \cdot \varphi\Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi}{4}.$$

Заметим, что, не переходя к цилиндрическим координатам, получим:

$$\iiint\limits_V z \cdot dx\,dy\,dz = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} z \cdot dz.$$

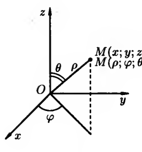


Рис. 19.

Сферическими координатами точки $M(x;y;z)$ пространства $Oxyz$ называется тройка чисел ρ, φ, θ, где ρ — длина радиуса-вектора точки M, φ — угол, образованный проекцией радиуса-вектора $\overline{OM}$ на плоскость Oxy и осью Ox, θ — угол отклонения радиуса-вектора $\overline{OM}$ от оси Oz (см. рис. 19).

Сферические координаты ρ, φ, θ связаны с декартовыми координатами x, y, z соотношениями:

$$\boxed{x = \rho\cos\varphi \cdot \sin\theta, \quad y = \rho\sin\varphi \cdot \sin\theta, \quad z = \rho\cos\theta}$$

$$(\rho \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi).$$

В некоторых случаях вычисление тройного интеграла удобно производить, перейдя к сферическим координатам. Для этого нужно воспользоваться формулой замены переменных в тройном интеграле (8.4). Так как якобиан преобразования

$$I(r;\varphi;z)=\begin{vmatrix}\cos\varphi\sin\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta\\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta\\ \cos\theta & 0 & -\rho\sin\theta\end{vmatrix}=$$

$$=\rho\sin\varphi\sin\theta\cdot\begin{vmatrix}\sin\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta\\ \cos\theta & -\rho\sin\theta\end{vmatrix}+$$

$$+\rho\cos\varphi\sin\theta\cdot\begin{vmatrix}\cos\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta\\ \cos\theta & -\rho\sin\theta\end{vmatrix}=$$

$$=\rho\sin\varphi\sin\theta(-\rho\sin\varphi\sin^2\theta-\rho\sin\varphi\cos^2\theta)+$$

$$+\rho\cos\varphi\sin\theta(-\rho\cos\varphi\sin^2\theta-\rho\cos\varphi\cos^2\theta)=$$

$$=-\rho^2\sin^2\varphi\sin\theta\cdot 1-\rho^2\cos^2\varphi\sin\theta\cdot 1=-\rho^2\sin\theta\cdot 1=-\rho^2\sin\theta,$$

то

$$\iiint\limits_V f(x;y;z)\,dx\,dy\,dz=$$

$$=\iiint\limits_{V^*} f(\rho\cos\varphi\sin\theta;\rho\sin\varphi\sin\theta;\rho\cos\theta)\cdot\rho^2\sin\theta\cdot d\rho\,d\varphi\,d\theta. \quad (8.6)$$

Замечание. Переходить к сферическим координатам удобно, когда область интегрирования V есть шар (уравнение его границы $x^2+y^2+z^2=R^2$ в сферических координатах имеет вид $\rho=R$) или его часть, а также если подынтегральная функция имеет вид $f(x^2+y^2+z^2)$.

Пример 8.3. Вычислить

$$\iiint\limits_V \frac{dx\cdot dy\cdot dz}{1+(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

где V — шар $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$.

○ Решение: Вычислим интеграл путем перехода к сферическим координатам: $x=\rho\cos\varphi\sin\theta$, $y=\rho\sin\varphi\sin\theta$, $z=\rho\cos\theta$. Тогда

$$dV=dx\,dy\,dz=\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\varphi\,d\theta.$$

Граница области V — сфера и ее уравнение имеет вид $\rho=1$, подынтегральная функция после замены переменных примет вид $\frac{1}{1+(\rho^2)^{3/2}}$, т. е. $\frac{1}{1+\rho^3}$. Новые переменные изменяются в следующих пределах: ρ — от 0 до 1, φ — от 0 до 2π, θ — от 0 до π. Таким образом, согласно формуле (8.6),

$$I=\iiint\limits_V \frac{1}{1+\rho^3}\cdot\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\varphi\,d\theta=\int\limits_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\frac{\rho^2}{1+\rho^3}\,d\rho=$$

$$= \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\left(\frac{1}{3}\ln|1+\rho^3|\right)\Big|_0^1 = \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} \frac{1}{3}\ln 2\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{3}\ln 2 \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \cdot \varphi\Big|_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{3}\ln 2 \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta = \frac{2\pi}{3}\ln 2(-\cos\theta)\Big|_0^{\pi} = \frac{4\pi}{3}\ln 2. \bullet$$

8.4. Некоторые приложения тройного интеграла

Объем тела

Объем области V выражается формулой $V = \iiint\limits_V dv$ или

$V = \iiint\limits_V dx\, dy\, dz$ — в декартовых координатах,

$V = \iiint\limits_V r\, dr\, d\varphi\, dz$ — в цилиндрических координатах,

$V = \iiint\limits_V \rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$ — в сферических координатах.

Масса тела

Масса тела m при заданной объемной плотности γ вычисляется с помощью тройного интеграла как

$$m = \iiint\limits_V \gamma(x; y; z)\, dx\, dy\, dz,$$

где $\gamma(x; y; z)$ — объемная плотность распределения массы в точке $M(x; y; z)$.

Статические моменты

Моменты S_{xy}, S_{xz}, S_{yz} тела относительно координатных плоскостей Oxy, Oxz, Oyz вычисляются по формулам

$$S_{xy} = \iiint\limits_V z \cdot \gamma(x; y; z)\, dv, \qquad S_{yz} = \iiint\limits_V x \cdot \gamma(x; y; z)\, dv,$$

$$S_{xz} = \iiint\limits_V y \cdot \gamma(x; y; z)\, dv.$$

Центр тяжести тела

Координаты центра тяжести тела V находятся по формулам

$$x_c = \frac{S_{yz}}{m}, \quad y_c = \frac{S_{xz}}{m}, \quad z_c = \frac{S_{xy}}{m}.$$

Моменты инерции тела

Моменты инерции тела относительно координатных плоскостей вычисляются по формулам

$$I_{xy} = \iiint\limits_V z^2 \cdot \gamma(x; y; z)\, dv, \qquad I_{yz} = \iiint\limits_V x^2 \cdot \gamma(x; y; z)\, dv,$$

$$I_{xz} = \iiint\limits_V y^2 \cdot \gamma(x; y; z)\, dv,$$

а моменты инерции относительно координатных осей:

$$I_x = \iiint\limits_V (y^2 + z^2) \cdot \gamma(x; y; z)\, dv, \qquad I_y = \iiint\limits_V (x^2 + z^2) \cdot \gamma(x; y; z)\, dv,$$

$$I_z = \iiint\limits_V (x^2 + y^2) \cdot \gamma(x; y; z)\, dv.$$

Пример 8.4. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z = x^2 + y^2$ и $z = 1$.

❍ Решение: Данное тело ограничено сверху плоскостью $z = 1$, снизу — параболоидом $z = x^2 + y^2$ (см. рис. 20). Объем тела находим, используя цилиндрические координаты:

$$V = \iiint\limits_V r \cdot dr\, d\varphi\, dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r \cdot dr \int\limits_{r^2}^1 dz =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r(1 - r^2)\, dr = \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) d\varphi = \frac{1}{4}\varphi\Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi}{2}.$$ ●

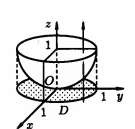


Рис. 20.

Рис. 21.

Пример 8.5. Найти массу шара $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2Rz$, если плотность в каждой точке шара обратно пропорциональна расстоянию от нее до начала координат (дополнительно: найти координаты центра тяжести).

❍ Решение: Уравнение сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$ можно записать так: $x^2 + y^2 + (z - R)^2 = R^2$. Центр шара расположен в точке $O_1(0; 0; R)$ (см. рис. 21). Пусть $M(x; y; z)$ — произвольная точка шара. Тогда, по условию, плотность γ определяется формулой $\gamma(x; y; z) = \dfrac{k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, где k — коэффициент пропорциональности, $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ — расстояние от точки M до начала координат.

Итак, $m = \iiint\limits_V \gamma(x; y; z)\, dv = \iiint\limits_V \dfrac{k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\, dv.$

Вычислять интеграл будем в сферических координатах. Уравнение сферы $x^2+y^2+z^2=2Rz$ примет вид $\rho^2=2R\rho\cdot\cos\theta$, т. е. $\rho=2R\cos\theta$. Поэтому сферические координаты будут изменяться в следующих пределах: ρ — от 0 до $2R\cos\theta$; θ — от 0 до $\frac{\pi}{2}$; φ — от 0 до 2π. Подынтегральная функция примет вид $\frac{k}{\sqrt{\rho^2}}=\frac{k}{\rho}$. Поэтому

$$m=\iiint\limits_V \frac{k}{\rho}\cdot\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\varphi\,d\theta=k\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta\int\limits_0^{2R\cos\theta}\rho\,d\rho=$$

$$=k\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta\cdot\frac{1}{2}\cdot 4R^2\cos^2\theta=-2R^2k\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d(\cos\theta)=$$

$$=-2R^2k\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\cdot\frac{\cos^3\theta}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=-2R^2k\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=\frac{2}{3}kR^2\varphi\Big|_0^{2\pi}=\frac{4}{3}\pi kR^2.$$

Из соображений симметрии следует, что $x_c=0$, $y_c=0$; вычислив интеграл $\frac{1}{m}\cdot\iiint\limits_V z\frac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dv$, найдем $z_c=\frac{4}{5}R$. Итак, координаты центра тяжести $(0;0;\frac{4}{5}R)$. ●

Глава III. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Лекции 11–14

Обобщением определенного интеграла на случай, когда область интегрирования есть некоторая кривая, является так называемый криволинейный интеграл.

§ 9. КРИВОЛИНЕЙНЫЙ ИНТЕГРАЛ I РОДА

9.1. Основные понятия

Пусть на плоскости Oxy задана непрерывная кривая AB (или L) длины l. Рассмотрим непрерывную функцию $f(x;y)$, определенную в точках дуги AB. Разобьем кривую AB точками $M_0 = A, M_1, M_2, \ldots, M_n = B$ на n произвольных дуг $M_{i-1}M_i$ с длинами Δl_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$(см. рис. 22). Выберем на каждой дуге $M_{i-1}M_i$ произвольную точку $(\widehat{x}_i; \widehat{y}_i)$ и составим сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(\widehat{x}_i; \widehat{y}_i)\Delta l_i. \qquad (9.1)$$

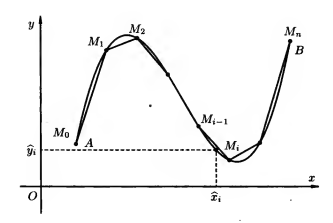


Рис. 22.

Ее называют *интегральной суммой* для *функции $f(x;y)$ по кривой AB*.

Пусть $\lambda = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \Delta l_i$ — наибольшая из длин дуг деления. Если при $\lambda \to 0$ (тогда $n \to \infty$) существует конечный предел интегральных сумм (9.1), то его называют *криволинейным интегралом от функции $f(x;y)$ по длине кривой* AB (или I рода) и обозначают $\int\limits_{AB} f(x;y)\,dl$ (или $\int\limits_{L} f(x;y)\,dl$).

Таким образом, по определению,

$$\int\limits_{AB} f(x;y)\,dl = \lim_{\substack{n\to\infty\\(\lambda\to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(\widehat{x}_i;\widehat{y}_i)\Delta l_i. \tag{9.2}$$

Условие существования криволинейного интеграла I рода (существования предела интегральной суммы (9.1) при $n \to \infty$ $(\lambda \to 0)$) представляет следующая теорема, которую мы приводим здесь без доказательства.

Теорема 9.1. Если функция $f(x;y)$ непрерывна в каждой точке гладкой кривой (в каждой точке $(x;y) \in L$ существует касательная к данной кривой и положение ее непрерывно меняется при перемещении точки по кривой), то криволинейный интеграл I рода существует и его величина не зависит ни от способа разбиения кривой на части, ни от выбора точек в них.

Аналогичным образом вводится понятие криволинейного интеграла от функции $f(x;y;z)$ по пространственной кривой L.

Приведем основные свойства криволинейного интеграла по длине дуги (I рода).

1. $\int\limits_{AB} f(x;y)\,dl = \int\limits_{BA} f(x;y)\,dl$, т. е. криволинейный интеграл I рода не зависит от направления пути интегрирования.

2. $\int\limits_{L} c\cdot f(x;y)\,dl = c\cdot \int\limits_{L} f(x;y)\,dl$, $c = \text{const}$.

3. $\int\limits_{L} (f_1(x;y) \pm f_2(x;y))\,dl = \int\limits_{L} f_1(x;y)\,dl \pm \int\limits_{L} f_2(x;y)\,dl$.

4. $\int\limits_{L} f(x;y)dl = \int\limits_{L_1} f(x;y)dl + \int\limits_{L_2} f(x;y)dl$, если путь интегрирования L разбит на части L_1 и L_2 такие, что $L = L_1 \bigcup L_2$ и L_1 и L_2 имеют единственную общую точку.

5. Если для точек кривой L выполнено неравенство $f_1(x;y) \leqslant f_2(x;y)$, то $\int\limits_{L} f_1(x;y)\,dl \leqslant \int\limits_{L} f_2(x;y)\,dl$.

6. $\int\limits_{AB} dl = \lim\limits_{\substack{n\to\infty\\(\lambda\to 0)}} \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta l_i = l$, где l — длина кривой AB.

7. Если функция $f(x;y)$ непрерывна на кривой AB, то на этой кривой найдется точка $(x_c;y_c)$ такая, что $\int\limits_{AB} f(x;y)\,dl = f(x_c;y_c)\cdot l$ (теорема о среднем).

9.2. Вычисление криволинейного интеграла I рода

Вычисление криволинейного интеграла I рода может быть сведено к вычислению определенного интеграла. Приведем без доказательства правила вычисления криволинейного интеграла I рода в случаях, если кривая L задана параметрическим, полярным и явным образом.

Параметрическое представление кривой интегрирования

Если кривая AB задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha; \beta]$, где $x(t)$ и $y(t)$ — непрерывно дифференцируемые функции параметра t, причем точке A соответствует $t = \alpha$, точке B — значение $t = \beta$, то

$$\int\limits_{AB} f(x;y)\,dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f\big(x(t);y(t)\big) \cdot \sqrt{x_t^{2'} + y_t^{2'}}\,dt. \tag{9.3}$$

Аналогичная формула имеет место для криволинейного интеграла от функции $f(x;y;z)$ по пространственной кривой AB, задаваемой уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$:

$$\int\limits_{AB} f(x;y;z)\,dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f\big(x(t);y(t);z(t)\big) \cdot \sqrt{x_t^{2'} + y_t^{2'} + z_t^{2'}}\,dt. \tag{9.4}$$

Явное представление кривой интегрирования

Если кривая AB задана уравнением $y = \varphi(x)$, $x \in [a;b]$, где $\varphi(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция, то

$$\int\limits_{AB} f(x;y)\,dl = \int\limits_{a}^{b} f\big(x;\varphi(x)\big) \cdot \sqrt{1 + y_x^{2'}}\,dx. \tag{9.5}$$

Подынтегральное выражение в правой части формулы (9.5) получается заменой в левой части $y = \varphi(x)$ и $dl = \sqrt{1 + y_x^{2'}}\,dx$ (дифференциал дуги кривой — см. Часть 1, п. 41.3).



Пример 9.1. Вычислить $\int\limits_L xy^2\,dl$, где L — отрезок прямой между точками $O(0;0)$ и $A(4;3)$.

Решение: Уравнение прямой OA есть $y = \frac{3}{4}x$, $0 \leqslant x \leqslant 4$. Согласно формуле (9.5), имеем:

$$\int\limits_L xy^2\,dl = \int\limits_0^4 x \cdot \left(\frac{3}{4}x\right)^2 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2}\,dx = \frac{45}{64}\int\limits_0^4 x^3\,dx = 45.$$ ●

Полярное представление кривой интегрирования

Если плоская кривая L задана уравнением $r = r(\varphi)$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$ в полярных координатах, то $dl = \sqrt{r^2 + (r'_\varphi)^2}d\varphi$ и

$$\int_L f(x;y)\,dl = \int_\alpha^\beta f(r\cos\varphi; r\sin\varphi)\cdot\sqrt{r^2 + {r'_\varphi}^2}d\varphi. \qquad (9.6)$$

Подчеркнем, что нижний предел определенного интеграла в формулах (9.3)–(9.6) должен быть меньше верхнего.

Пример 9.2. Вычислить $\int_L (x+y)dl$, где L — лепесток лемнискаты $r = \sqrt{\sin 2\varphi}$, расположенной в I координатном углу.

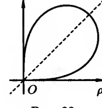


Рис. 23.

Решение: Кривая интегрирования изображена на рисунке 23. Воспользуемся формулой (9.6). Так как

$$dl = \sqrt{\sin 2\varphi + \frac{\cos^2 2\varphi}{\sin 2\varphi}}d\varphi = \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin 2\varphi}} = \frac{d\varphi}{r},$$

то, заметив, что $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, получаем:

$$\int_L (x+y)\,dl = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (r\cos\varphi + r\sin\varphi)\frac{d\varphi}{r} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi + \sin\varphi)\,d\varphi = 2.$$

9.3. Некоторые приложения криволинейного интеграла I рода

Криволинейный интеграл I рода имеет разнообразные приложения в математике и механике.

Длина кривой

Длина l кривой AB плоской или пространственной линии вычисляется по формуле $l = \int_{AB} dl$.

Площадь цилиндрической поверхности

Если направляющей цилиндрической поверхности служит кривая AB, лежащая в плоскости Oxy, а образующая параллельна оси Oz (см. рис. 24), то площадь поверхности, задаваемой функцией $z = f(x;y)$, находится по формуле $Q = \int_{AB} f(x;y)\,dl.$

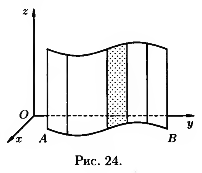


Рис. 24.

Масса кривой

Масса материальной кривой AB (провод, цепь, трос, ...) определяется формулой $m = \int\limits_{AB} \gamma(M)\,dl$, где $\gamma = \gamma(M) = \gamma(x;y)$ — плотность кривой в точке M.

❑ Разобьем кривую AB на n элементарных дуг $\widehat{M_{i-1}M_i}$ $(i = \overline{1,n})$. Пусть $(\widehat{x}_i;\widehat{y}_i)$ — произвольная точка дуги $\widehat{M_{i-1}M_i}$. Считая приближенно участок дуги однородным, т. е. считая, что плотность в каждой точке дуги такая же, как и в точке $(\widehat{x}_i;\widehat{y}_i)$, найдем приближенное значение массы m_i дуги $\widehat{M_{i-1}M_i}$:

$$m_i \approx \gamma(\widehat{x}_i;\widehat{y}_i)\Delta l_i.$$

Суммируя, находим приближенное значение массы m:

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} \gamma(\widehat{x}_i;\widehat{y}_i)\Delta l_i. \tag{9.7}$$

За массу кривой AB примем предел суммы (9.7) при условии, что $\max \Delta l_i \to 0$ $(n \to \infty)$, т. е.

$$m = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\max \Delta l_i \to 0)}} \sum_{i=1}^{n} \gamma(\widehat{x}_i;\widehat{y}_i)\Delta l_i,$$

или, согласно формуле (9.2),

$$m = \int\limits_{AB} \gamma(x;y)\,dl.$$

(Заметим, что предел существует, если кривая AB гладкая, а плотность задана непрерывной в каждой точке AB функцией.) ■

Статические моменты, центр тяжести

Статические моменты относительно осей Ox и Oy и координаты центра тяжести материальной кривой AB определяются по формулам

$$S_x = \int\limits_{AB} y\cdot\gamma(x;y)\,dl, \quad S_y = \int\limits_{AB} x\cdot\gamma(x;y)\,dl, \quad x_c = \frac{S_y}{m}, \quad y_c = \frac{S_x}{m}.$$

Моменты инерции

Для материальной кривой AB моменты I_x, I_y, I_O инерции относительно осей Ox, Oy и начала координат соответственно равны:

$$I_x = \int\limits_{AB} y^2\cdot\gamma(x;y)\,dl, \quad I_y = \int\limits_{AB} x^2\cdot\gamma(x;y)\,dl, \quad I_O = \int\limits_{AB} (x^2+y^2)\cdot\gamma(x;y)\,dl.$$

Пример 9.3. Найти центр тяжести полуокружности $x^2 + y^2 = R^2$, лежащей в верхней полуплоскости. Плотность считать равной единице в каждой точке кривой $(\gamma = 1)$.

○ Решение: Из соображений симметрии ясно, что центр тяжести находится на оси Oy (см. рис. 25). Поэтому $x_c = 0$. Ордината центра тяжести

$$y_c = \frac{\int\limits_{AB} y \cdot dl}{\int\limits_{AB} dl}.$$

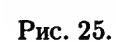


Рис. 25.

Знаменатель дроби — длина полуокружности. Поэтому $\int\limits_{AB} dl = \pi R$.

Для вычисления числителя воспользуемся параметрическими уравнениями окружности $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$. Имеем:

$$\int\limits_{AB} y \cdot dl = \int\limits_{0}^{\pi} R\sin t \cdot \sqrt{R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t} \cdot dt = R^2 \int\limits_{0}^{\pi} \sin t\, dt = 2R^2.$$

Следовательно, $y_c = \dfrac{2R^2}{\pi R} = \dfrac{2R}{\pi}$. Итак, $x_c = 0$, $y_c = \dfrac{2R}{\pi}$. ●

§ 10. КРИВОЛИНЕЙНЫЙ ИНТЕГРАЛ II РОДА

10.1. Основные понятия

Решение задачи о вычислении работы переменной силы при перемещении материальной точки вдоль некоторой кривой (и других) приводит к понятию криволинейного интеграла II рода.

Криволинейный интеграл II рода определяется почти так же, как и интеграл I рода.

Пусть в плоскости Oxy задана непрерывная кривая AB (или L) и функция $P(x;y)$, определенная в каждой точке кривой. Разобьем кривую AB точками $M_0 = A, M_1, \ldots, M_n = B$ в направлении от точки A к точке B на n дуг $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ с длинами Δl_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

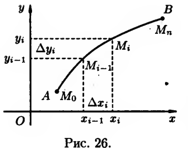


Рис. 26.

На каждой «элементарной дуге» $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ возьмем точку $(\widehat{x}_i;\widehat{y}_i)$ и составим сумму вида

$$\sum_{i=1}^{n} P(\widehat{x}_i;\widehat{y}_i) \cdot \Delta x_i, \tag{10.1}$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ — проекция дуги $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ на ось Ox (см. рис. 26).

Сумму (10.1) называют *интегральной суммой для функции $P(x;y)$ по переменной x*. Таких сумм можно составить бесчисленное множество. (Отличие сумм (9.1) и (10.1) очевидно.)

Если при $\lambda = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \Delta l_i \to 0$ интегральная сумма (10.1) имеет конечный предел, не зависящий ни от способа разбиения кривой AB, ни от выбора точек $(\widehat{x}_i;\widehat{y}_i)$, то его называют *криволинейным интегралом по коор-*

динате x (или II рода) *от функции* $P(x;y)$ *по кривой* AB и обозначают $\int\limits_{AB} P(x;y)\,dx$ или $\int\limits_{L} P(x;y)\,dx$.

Итак,

$$\boxed{\int\limits_{AB} P(x;y)\,dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\lambda\to 0)}} \sum_{i=1}^{n} P(\widehat{x}_i;\widehat{y}_i)\Delta x_i.}$$

Аналогично вводится криволинейный интеграл от функции $Q(x;y)$ по координате y:

$$\boxed{\int\limits_{AB} Q(x;y)\,dy = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\lambda\to 0)}} \sum_{i=1}^{n} Q(\widehat{x}_i;\widehat{y}_i)\Delta y_i,}$$

где Δy_i — проекция дуги $\widehat{M_{i-1}M_i}$ на ось Oy.

Криволинейный интеграл II рода общего вида $\int\limits_{AB} P(x;y)\,dx+Q(x;y)\,dy$ определяется равенством

$$\int\limits_{AB} P(x;y)\,dx + Q(x;y)\,dy = \int\limits_{AB} P(x;y)\,dx + \int\limits_{AB} Q(x;y)\,dx.$$

Криволинейный интеграл $\int\limits_{L} Q(x;y;z)\,dx+Q(x;y;z)\,dy+R(x;y;z)\,dz$ по пространственной кривой L определяется аналогично.

Теорема 10.1. Если кривая AB гладкая, а функции $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ непрерывные на кривой AB, то криволинейный интеграл II рода существует.

Отметим лишь некоторые свойства криволинейного интеграла II рода.

1. При изменении направления пути интегрирования криволинейный интеграл II рода изменяет свой знак на противоположный, т. е.

$$\int\limits_{AB} = -\int\limits_{BA}$$

(проекция дуги $\widehat{M_{i-1}M_i}$ на оси Ox и Oy меняют знаки с изменением направления).

2. Если кривая AB точкой C разбита на две части AC и CB, то интеграл по всей кривой равен сумме интегралов по ее частям, т. е.

$$\int\limits_{AB} = \int\limits_{AC} + \int\limits_{CB}.$$

3. Если кривая AB лежит в плоскости, перпендикулярной оси Ox, то

$$\int\limits_{L} P(x;y)dx = 0 \quad (\text{все } \Delta x_i = 0);$$

аналогично для кривой, лежащей в плоскости, перпендикулярной оси Oy:

$$\int\limits_L Q(x;y)dy = 0 \quad (\text{все } \Delta y_i = 0).$$

4. Криволинейный интеграл по замкнутой кривой $\left(\text{обозначается } \oint\right)$ не зависит от выбора начальной точки (зависит только от направления обхода кривой).

❑ Действительно,

$$\oint\limits_{AmCnA} = \int\limits_{AmC} + \int\limits_{CnA}$$

(см. рис. 27). С другой стороны,

$$\oint\limits_{CnAmC} = \int\limits_{CnA} + \int\limits_{AmC} .$$

Таким образом,

$$\oint\limits_{AmCnA} = \oint\limits_{CnAmC} .$$ ■

Рис. 27.

10.2. Вычисление криволинейного интеграла II рода

Вычисление криволинейного интеграла II рода, как и I рода, может быть сведено к вычислению определенного интеграла.

Параметрическое представление кривой интегрирования

Пусть кривая AB задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$ и $y = y(t)$, где функции $x(t)$ и $y(t)$ непрерывны вместе со своими производными $x'(t)$ и $y'(t)$ на отрезке $[\alpha;\beta]$, причем начальной точке A кривой соответствует значение параметра $t = \alpha$, а конечной точке B — значение $t = \beta$. И пусть функция $P(x;y)$ непрерывна на кривой AB. Тогда, по определению,

$$\int\limits_{AB} P(x;y)\,dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\lambda\to 0)}} \sum_{i=1}^{n} P(\widehat{x}_i;\widehat{y}_i)\Delta x_i.$$

Преобразуем интегральную сумму к переменной t. Так как

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = x(t_i) - x(t_{i-1}),$$

то по формуле Лагранжа (см. Часть 1, (25.2)) имеем: $\Delta x_i = x'(c_i)\Delta t_i$, где $c_i \in (t_{i-1};t_i)$, $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$.

Выберем точку $(\widehat{x}_i;\widehat{y}_i)$ так, чтобы $\widehat{x}_i = x(c_i)$, $\widehat{y}_i = y(c_i)$. Тогда преобразованная интегральная сумма $\sum\limits_{i=1}^{n} P(x(c_i);y(c_i)) \cdot x'(c_i) \cdot \Delta t_i$ будет интегральной суммой для функции одной переменной $P(x(t);y(t)) \cdot x'(t)$ на промежутке $[\alpha;\beta]$. Поэтому

$$\int\limits_{AB} P(x;y)\,dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} P\big(x(t);y(t)\big)x'(t)\,dt. \tag{10.2}$$

Аналогично получаем:

$$\int_{AB} Q(x;y)\,dy = \int_{\alpha}^{\beta} Q\big(x(t);y(t)\big)y'(t)\,dt. \qquad (10.3)$$

Складывая почленно полученные равенства (10.2) и (10.3), получаем:

$$\int_{AB} P(x;y)\,dx + Q(x;y)\,dy = \int_{\alpha}^{\beta} \Big(P\big(x(t);y(t)\big)x'(t) + Q\big(x(t);y(t)\big)y'(t)\Big)\,dt. \qquad (10.4)$$

Явное представление кривой интегрирования

Если кривая AB задана уравнением $y = \varphi(x)$, $x \in [a;b]$, где функция $\varphi(x)$ и ее производная $\varphi'(x)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$, то из формулы (10.4), приняв x за параметр, имеем параметрические уравнения кривой AB: $x = x$, $y = \varphi(x)$, $x \in [a;b]$, откуда получим:

$$\int_{AB} P(x;y)\,dx + Q(x;y)\,dy = \int_{a}^{b} \Big[P\big(x;\varphi(x)\big) + Q\big(x;\varphi(x)\big)\varphi'(x)\Big]\,dx. \qquad (10.5)$$

В частности,

$$\int_{AB} P(x;y)\,dx = \int_{a}^{b} P\big(x;\varphi(x)\big)\,dx. \qquad (10.6)$$

Если AB — гладкая пространственная кривая, которая описывается непрерывными на отрезке $[\alpha;\beta]$ функциями $x = x(t)$, $y = y(t)$ и $z = z(t)$, то криволинейный интеграл

$$\int_{AB} P(x;y;z)\,dx + Q(x;y;z)dy + R(x;y;z)\,dz$$

вычисляется по формуле

$$\int_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \big[P\big(x(t);y(t);z(t)\big)x'(t) + Q\big(x(t);y(t);z(t)\big)y'(t) + R\big(x(t);y(t);z(t)\big)z'(t)\big]dt. \qquad (10.7)$$

Замечание. Криволинейные интегралы I и II рода связаны соотношением $\int_{AB} P\,dx + Q\,dy = \int_{AB} (P\cos\alpha + Q\cos\beta)\,dl$, где α и β — углы, образованные касательной к кривой AB в точке $M(x;y)$ с осями Ox и Oy соответственно.

Пример 10.1. Вычислить $I = \int_{L} (x-y)^2\,dx + (x+y)^2\,dy$, L — ломаная OAB, где $O(0;0)$, $A(2;0)$, $B(4;2)$.

○ Решение: Так как $L = OAB = OA + AB$ (см. рис. 28), то $I = \int\limits_L = \int\limits_{OA} + \int\limits_{AB}$.

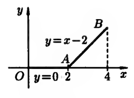


Рис. 28.

Уравнение отрезка OA есть $y = 0$, $0 \leqslant x \leqslant 2$; уравнение отрезка AB: $y = x-2$, $x \in [2;4]$. Согласно формуле (10.5), имеем:

$$I = \int\limits_0^2 \left[(x-0)^2 + 0\right] dx + \int\limits_2^4 \left[2^2 + (2x-2)^2 \cdot 1\right] dx =$$

$$= \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 + 4x\Big|_2^4 + \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x-2)^3}{3}\Big|_2^4 = \frac{8}{3} + (16-8) + \frac{1}{6}(216-8) = \frac{136}{3}. \quad \bullet$$

Пример 10.2. Вычислить $I = \int\limits_L y^2\,dx + (x^2+z)\,dy + (x+y+z^2)\,dz$, L — отрезок прямой в пространстве от точки $A(1;0;2)$ до точки $B(3;1;4)$.

○ Решение: Составим уравнение прямой, проходящей через точки A и B: $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}$ или в параметрической форме: $x = 2t+1$, $y = t$, $z = 2t+2$. При перемещении от точки A к точке B параметр t меняется от 0 до 1. По формуле (10.7) находим, что

$$I = \int\limits_0^1 \Big[t^2 \cdot 2 + \big((2t+1)^2 + 2t + 2\big) \cdot 1 + \big(2t+1+t+(2t+2)^2\big) \cdot 2\Big]\, dt =$$

$$= \int\limits_0^1 (14t^2 + 28t + 13)\, dt = \frac{95}{3}. \quad \bullet$$

10.3. Формула Остроградского–Грина

Связь между двойным интегралом по области D и криволинейным интегралом по границе L этой области устанавливает формула Остроградского–Грина, которая широко применяется в математическом анализе.

Пусть на плоскости Oxy задана область D, ограниченная кривой, пересекающейся с прямыми, параллельными координатным осям не более чем в двух точках, т. е. область D — правильная.

Теорема 10.2. Если функции $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в области D, то имеет место формула

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \oint\limits_L P\,dx + Q\,dy, \qquad (10.8)$$

где L — граница области D и интегрирование вдоль кривой L производится в положительном направлении (т.е. при движении вдоль кривой, область D остается слева).

Формула (10.8) называется формулой Остроградского–Грина.

❑ Пусть $y = \varphi_1(x)$ — уравнение дуги AnB, а $y = \varphi_2(x)$ — уравнение дуги AmB (см. рис. 29). Найдем сначала $\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy$. По правилу вычисления двойного интеграла, имеем:

$$\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}dy =$$

$$= \int\limits_a^b dx \cdot P(x;y)\Big|_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} =$$

$$= \int\limits_a^b P\big(x;\varphi_2(x)\big)\,dx - \int\limits_a^b P\big(x;\varphi_1(x)\big)\,dx.$$

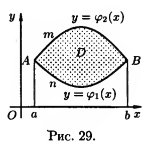


Рис. 29.

Или, согласно формуле (10.6),

$$\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}dx\,dy = \int\limits_{AmB} P(x;y)\,dx - \int\limits_{AnB} P(x;y)\,dx =$$

$$= -\int\limits_{BmA} P(x;y)\,dx - \int\limits_{AnB} P(x;y)\,dx = -\oint\limits_L P(x;y)\,dx. \quad (10.9)$$

Аналогично доказывается, что

$$\iint\limits_D \frac{\partial Q}{\partial x}dx\,dy = \oint\limits_L Q(x;y)\,dx. \quad (10.10)$$

Если из равенства (10.10) вычесть равенство (10.9), то получим формулу (10.8). ■

Замечание. Формула (10.8) справедлива и для произвольной области, которую можно разбить на конечное число правильных областей.



Пример 10.3. С помощью формулы Остроградского-Грина вычислить

$$I = \oint\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,dx + y\cdot\big(xy + \ln\big(x + \sqrt{x^2+y^2}\big)\big)\,dy,$$

где L — контур прямоугольника с вершинами $A(3;2)$, $B(6;2)$, $C(6;4)$, $D(3;4)$.

❍ Решение: На рисунке 30 изображен контур интегрирования. Поскольку $\frac{\partial Q}{\partial x} = y\cdot\left(\frac{y\cdot\sqrt{x^2+y^2}+1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$; $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, по формуле (10.8) имеем:

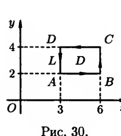


Рис. 30.

$$I = \iint\limits_D \left(\frac{y(y\sqrt{x^2+y^2}+1)}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_D y^2\,dx\,dy = \int\limits_3^6 dx \int\limits_2^4 y^2\,dy = 56. \quad ●$$

10.4. Условия независимости криволинейного интеграла II рода от пути интегрирования



Пусть $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ — две произвольные точки односвязной области D плоскости Oxy (область D называется ***односвязной***, если для любого замкнутого контура, лежащего в этой области, ограниченная им часть плоскости целиком принадлежит D (область без «дыр»)). Точки A и B можно соединить различными линиями (на рис. 31 это L_1, L_2 и L_3). По каждой из этих кривых интеграл $I = \int\limits_{AB} P(x;y)\,dx + Q(x;y)\,dy$ имеет, вообще говоря, свое значение.

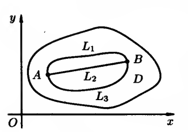


Рис. 31.

Если же его значения по всевозможным кривым AB одинаковы, то говорят, что интеграл I не зависит от вида пути интегрирования. В этом случае для интеграла I достаточно отметить лишь его начальную точку $A(x_1;y_1)$ и его конечную точку $B(x_2;y_2)$ пути. Записывают:

$$I = \int\limits_{(x_1;y_1)}^{(x_2;y_2)} P(x;y)\,dx + Q(x;y)\,dy. \qquad (10.11)$$

Каковы же условия, при которых криволинейный интеграл II рода не зависел от вида пути интегрирования?

Теорема 10.3. Для того чтобы криволинейный интеграл $I = \int\limits_L P dx + Q dy$ не зависел от пути интегрирования в односвязной области D, в которой функции $P(x;y)$, $Q(x;y)$ непрерывны вместе со своими частными производными, необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке этой области выполнялось условие

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \qquad (10.12)$$

❑ Докажем достаточность условия (10.12). Рассмотрим произвольный замкнутый контур $AmBnA$ (или L) в области D (см. рис. 32). Для него имеет место формула Остроградского–Грина (10.8). В силу условия (10.12) имеем:

$$\oint\limits_L P\,dx + Q\,dy = 0, \quad \text{или} \quad \oint\limits_{AmBnA} P\,dx + Q\,dy = 0.$$

Учитывая свойства криволинейного интеграла, имеем:

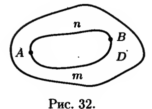


Рис. 32.

$$\oint\limits_{AmBnA} P\,dx + Q\,dy =$$
$$= \int\limits_{AmB} P\,dx + Q\,dy + \int\limits_{BnA} P\,dx + Q\,dy =$$
$$= \int\limits_{AmB} P\,dx + Q\,dy - \int\limits_{AnB} P\,dx + Q\,dy = 0,$$

т. е.

$$\int\limits_{AmB} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{AnB} P\,dx + Q\,dy.$$

Полученное равенство означает, что криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования. ■



В ходе доказательства теоремы получено, что если выполняется условие $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, то интеграл по замкнутому контуру равен нулю:

$$\oint\limits_{L} Pdx + Qdy = 0.$$

Верно и обратное утверждение.

Следствие 10.1. Если выполнено условие (10.12), то подынтегральное выражение $P(x;y)dx + Q(x;y)dy$ является полным дифференциалом некоторой функции $u = u(x;y)$ (см. Часть 1, (44.5)), т. е.

$$P(x;y)\,dx + Q(x;y)\,dy = dU(x;y). \tag{10.13}$$

Тогда (см. (10.11)):

$$I = \int\limits_{(x_1;y_1)}^{(x_2;y_2)} P(x;y)\,dx + Q(x;y)\,dy = \int\limits_{(x_1;y_1)}^{(x_2;y_2)} dU(x;y) = \\ = U(x;y)\Big|_{(x_1;y_1)}^{(x_2;y_2)} = U(x_2;y_2) - U(x_1;y_1),$$

т. е.

$$\int\limits_{(x_1;y_1)}^{(x_2;y_2)} P(x;y)\,dx + Q(x;y)\,dy = U(x_2;y_2) - U(x_1;y_1). \tag{10.14}$$

Формула (10.14) называется обобщенной формулой Ньютона–Лейбница для криволинейного интеграла от полного дифференциала.

Следствие 10.2. Если подынтегральное выражение $Pdx + Qdy$ есть полный дифференциал и путь интегрирования L замкнутый, то $\oint\limits_{L} P\,dx + Q\,dy = 0$.

Замечания.

1. Чтобы не спутать переменную интегрирования x с верхним пределом x, переменную интегрирования обозначают другой буквой (например, t, ξ, и т. д.).

2. Функцию $U = U(x;y)$, удовлетворяющую условию (10.12), можно найти, используя формулу

$$U(x;y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(\chi;y_0)\,d\chi + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x;\xi)\,d\xi + C. \tag{10.15}$$

В качестве начальной точки $(x_0; y_0)$ обычно берут точку $(0;0)$ — начало координат (см. пример 10.5).

3. Аналогичные результаты справедливы для криволинейного интеграла

$$\int_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

по пространственной кривой. Условие (10.12), равенство (10.13), формулы (10.14) и (10.15) имеют соответственно вид:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z};$$

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = dU(x;y;z),$$

$$\int\limits_{(x_1;y_1;z_1)}^{(x_2;y_2;z_2)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = U(x_2;y_2;z_2) - U(x_1;y_1;z_1),$$

$$U(x;y;z) = \int\limits_{x_0}^{x} P(\chi;y_0;z_0)\,d\chi + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x;\xi;z_0)\,d\xi + \int\limits_{z_0}^{z} R(x;y;\zeta)\,d\zeta + C$$

(см. пример 27.1).

Пример 10.4. Найти $I = \int\limits_{(0;0)}^{(1;1)} y\,dx + x\,dy.$

○ Решение: Здесь $P = y$, $Q = x$, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$. Согласно вышеприведенной теореме, интеграл не зависит от пути интегрирования. В качестве пути интегрирования можно взять отрезок прямой $y = x$, дугу параболы $y = x^2$ и т. д. или воспользоваться формулой (10.14). Так как $ydx + xdy = d(xy)$, то

$$I = \int\limits_{(0;0)}^{(1;1)} d(x \cdot y) = xy\Big|_{(0;0)}^{(1;1)} = 1 - 0 = 1.$$ ●

Пример 10.5. Убедиться, что выражение $e^{-y}\,dx - (2y + xe^{-y})\,dy$ представляет собой полный дифференциал некоторой функции $U(x;y)$ и найти ее.

○ Решение: Для того чтобы указанное выражение являлось полным дифференциалом, необходимо выполнение условий (10.12):

$$\frac{\partial}{\partial y}(e^{-y}) = -e^{-y}; \quad \frac{\partial}{\partial x}\big(-(2y + xe^{-y})\big) = -e^{-y}$$

— условия выполнены, следовательно, $e^{-y}\,dx - (2y + xe^{-y})\,dy = dU(x;y)$. А так как полный дифференциал имеет вид

$$dU(x;y) = \frac{\partial}{\partial x}U(x;y)\,dx + \frac{\partial}{\partial y}U(x;y)\,dy$$

(см. Часть 1, п. 44.3), то верны соотношения

$$\frac{\partial}{\partial x}U(x;y) = e^{-y}; \quad \frac{\partial}{\partial y}U(x;y) = -(2y + xe^{-y}). \tag{10.16}$$

Интегрируем по x первое из уравнений, считая y постоянным, при этом вместо постоянной интегрирования следует поставить $\varphi(y)$ — неизвестную функцию, зависящую только от y:

$$U(x;y) = \int e^{-y}\,dx = xe^{-y} + \varphi(y).$$

Подставляя полученное выражение во второе из уравнений (10.16), найдем $\varphi(y)$:

$$\frac{\partial}{\partial y}\big(xe^{-y} + \varphi(y)\big) = -xe^{-y} + \varphi'(y) = -(2y + xe^{-y});$$

$$\varphi'(y) = -2y, \quad \varphi(y) = -y^2 + c.$$

Таким образом, $U(x;y) = xe^{-y} - y^2 + c.$ ●

Отметим, что функцию U проще найти, используя формулу (10.15):

$$U(x;y) = \int_0^x e^{-0}\,d\chi + \int_0^y (-2\xi + xe^{-\xi})\,d\xi + C =$$

$$= x - y^2 + xe^{-y} - x + C = xe^{-y} - y^2 + C.$$

10.5. Некоторые приложения криволинейного интеграла II рода

Площадь плоской фигуры

Площадь S плоской фигуры, расположенной в плоскости Oxy и ограниченной замкнутой линией L, можно найти по формуле

$$\boxed{S = \frac{1}{2}\oint_L x\,dy - y\,dx,} \tag{10.17}$$

при этом кривая L обходится против часовой стрелки.

❑ Действительно, положив в формуле Остроградского–Грина (10.8) $P(x;y) = 0$, $Q(x;y) = x$, получим:

$$\iint_D (1-0)\,dx\,dy = \oint_L 0\cdot dx + x\,dy,$$

или

$$S = \oint_L x\,dy. \tag{10.18}$$

Аналогично, полагая $P = -y$, $Q = 0$, найдем еще одну формулу для вычисления площади фигуры с помощью криволинейного интеграла:

$$S = -\oint_L y\,dx. \tag{10.19}$$

Сложив почленно равенства (10.18) и (10.19) и разделив на два, получим:

$$S = \frac{1}{2}\oint\limits_{L} x\,dy - y\,dx. \qquad \blacksquare$$

Формула (10.17) используется чаще, чем формулы (10.18) и (10.19).

Работа переменной силы

Переменная сила $\bar{F}(P(x;y);Q(x;y))$ на криволинейном участке AB производит работу, которая находится по формуле

$$A = \int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy. \tag{10.20}$$

❑ Действительно, пусть материальная точка $(x;y)$ под действием переменной силы $\bar{F}$ перемещается в плоскости Oxy по некоторой кривой AB (от точки A до точки B).

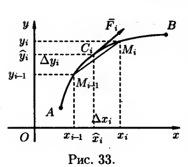


Рис. 33.

Разобьем кривую AB точками $M_0 = A, M_1, M_2, \ldots$ $\ldots, M_n = B$ на n «элементарных» дуг $\widehat{M_{i-1}M_i}$ длины Δl_i и в каждой из них возьмем произвольную точку $C_i(\widehat{x}_i;\widehat{y}_i)$, $i = 1;2;\ldots;n$ (см. рис. 33). Заменим каждую дугу $\widehat{M_{i-1}M_i}$ вектором $\overline{M_{i-1}M_i} = (\Delta x_i;\Delta y_i)$, а силу $\bar{F}$ будем считать постоянной на векторе перемещения $\overline{M_{i-1}M_i}$ и равной заданной силе в точке C_i дуги $\widehat{M_{i-1}M_i}$: $\bar{F}_i = \big(P(\widehat{x}_i;\widehat{y}_i);Q(\widehat{x}_i;\widehat{y}_i)\big)$.

Тогда скалярное произведение $\bar{F}_i \cdot \overline{M_{i-1}M_i}$ можно рассматривать как приближенное значение работы $\bar{F}_i$ вдоль дуги $\widehat{M_{i-1}M_i}$:

$$A_i \approx \bar{F}_i \cdot \overline{M_{i-1}M_i} = P(\widehat{x}_i;\widehat{y}_i)\cdot\Delta x_i + Q(\widehat{x}_i;\widehat{y}_i)\cdot\Delta y_i.$$

Приближенное значение работы A силы $\bar{F}$ на всей кривой составит величину

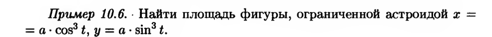
$$A = \sum_{i=1}^{n} A_i \approx \sum_{i=1}^{n} P(\widehat{x}_i;\widehat{y}_i)\cdot\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} Q(\widehat{x}_i;\widehat{y}_i)\cdot\Delta y_i.$$

За точное значение работы A примем предел полученной суммы при $\lambda = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \Delta l_i \to 0$ (тогда, очевидно, $\Delta x_i \to 0$ и $\Delta y_i \to 0$):

$$A = \lim_{\substack{\lambda\to 0\\(n\to\infty)}} \sum_{i=1}^{n} P(\widehat{x}_i;\widehat{y}_i)\cdot\Delta x_i + Q(\widehat{x}_i;\widehat{y}_i)\cdot\Delta y_i = \int\limits_{AB} P(x;y)\,dx + Q(x;y)\,dy. \quad \blacksquare$$

Замечание. В случае пространственной кривой AB имеем:

$$A = \int\limits_{AB} P(x;y;z)\,dx + Q(x;y;z)\,dy + R(x;y;z)\,dz.$$



Пример 10.6. Найти площадь фигуры, ограниченной астроидой $x = a\cdot\cos^3 t$, $y = a\cdot\sin^3 t$.

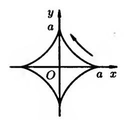


Рис. 34.

❍ Решение: При обхождении астроиды в положительном направлении параметр t изменяется от 0 до 2π (см. рис. 34).

Применяя формулы (10.17) и (10.4), получим:

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (a\cos^3 t \cdot 3a\sin^2 t\cos t + a\sin^3 t \cdot 3a\cos^2 t\sin t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 3a^2 \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 2t}{4}dt = \frac{3a^2}{8}\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 4t}{2}dt = \frac{3a^2\pi}{8}.$$ ●

Пример 10.7. Найти работу силы $\bar{F} = 4x^6\bar{i} + xy\bar{j}$ вдоль кривой $y = x^3$ от точки $O(0;0)$ до точки $B(1;1)$.

❍ Решение: По формуле (10.20) находим:

$$A = \int_L 4x^6\,dx + xy\,dy = \int_0^1 (4x^6 + x\cdot x^3\cdot 3x^2)\,dx = \int_0^1 7x^6\,dx = 1.$$ ●

§ 11. ПОВЕРХНОСТНЫЙ ИНТЕГРАЛ I РОДА

11.1. Основные понятия

Обобщением двойного интеграла является так называемый поверхностный интеграл.

Пусть в точках некоторой поверхности S, с площадью S, пространства $Oxyz$ определена непрерывная функция $f(x;y;z)$. Разобьем поверхность S на n частей S_i, площади которых обозначим через ΔS_i (см. рис. 35), а диаметры — через d_i, $i = \overline{1;n}$. В каждой части S_i возьмем произвольную точку $M_i(x_i;y_i;z_i)$ и составим сумму

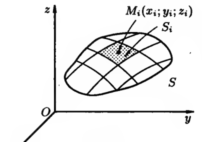


Рис. 35.

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i;y_i;z_i)\Delta S_i. \tag{11.1}$$

Она называется *интегральной* для функции $f(x;y;z)$ *по поверхности* S.

Если при $\lambda = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} d_i \to 0$ интегральная сумма (11.1) имеет предел, то он называется ***поверхностным интегралом I рода*** от функции $f(x;y;z)$ по поверхности S и обозначается $\iint\limits_S f(x;y;z)\,ds$.

Таким образом, по определению,

$$\boxed{\iint\limits_S f(x;y;z)\,ds = \lim_{\substack{\lambda\to 0\\(n\to\infty)}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i;y_i;z_i)\Delta S_i.} \tag{11.2}$$



Отметим, что «если поверхность S гладкая (в каждой ее точке существует касательная плоскость, которая непрерывно меняется с перемещением точки по поверхности), а функция $f(x;y;z)$ непрерывна на этой поверхности, то поверхностный интеграл существует» (теорема существования).

Поверхностный интеграл I рода обладает следующими свойствами:

1. $\iint\limits_S c \cdot f(x;y;z)\,ds = c \cdot \iint\limits_S f(x;y;z)\,ds$, где c — число.

2. $\iint\limits_S (f_1(x;y;z) \pm f_2(x;y;z))\,ds = \iint\limits_S f_1(x;y;z)\,ds \pm \iint\limits_S f_2(x;y;z)\,ds.$

3. Если поверхность S разбить на части S_1 и S_2 такие, что $S = S_1 \bigcup S_2$, а пересечение S_1 и S_2 состоит лишь из границы, их разделяющей, то

$$\iint\limits_S f(x;y;z)\,ds = \iint\limits_{S_1} f(x;y;z)\,ds + \iint\limits_{S_2} f(x;y;z)\,ds.$$

4. Если на поверхности S выполнено неравенство $f_1(x;y;z) \leqslant f_2(x;y;z)$, то $\iint\limits_S f_1(x;y;z)\,ds \leqslant \iint\limits_S f_2(x;y;z)\,ds$.

5. $\iint\limits_S ds = S$, где S — площадь поверхности S.

6. $\left|\iint\limits_S f(x;y;z)\,ds\right| \leqslant \iint\limits_S |f(x;y;z)|\,ds.$

7. Если $f(x;y;z)$ непрерывна на поверхности S, то на этой поверхности существует точка $(x_c;y_c;z_c)$ такая, что

$$\iint\limits_S f(x;y;z)\,ds = f(x_c;y_c;z_c) \cdot S$$

(теорема о среднем значении).

11.2. Вычисление поверхностного интеграла I рода

Вычисление поверхностного интеграла I рода сводится к вычислению двойного интеграла по области D — проекции поверхности S на плоскость Oxy.

Разобьем поверхность S на части S_i, $i = \overline{1;n}$. Обозначим через σ_i проекцию S_i на плоскость Oxy. При этом область D окажется разбитой на n частей $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$. Возьмем в σ_i произвольную точку $P_i(x_i;y_i)$ и восстановим перпендикуляр к плоскости Oxy до пересечения с поверхностью S. Получим точку $M_i(x_i;y_i;z_i)$ на поверхности S_i. Проведем в точке M_i касательную плоскость и рассмотрим ту ее часть T_i, которая на плоскость

Oxy проектируется в область σ_i (см. рис. 36). Площади элементарных частей S_i, T_i и σ_1 обозначим как ΔS_i, ΔT_i и $\Delta\sigma_i$ соответственно. Будем приближенно считать, что

$$\Delta T_i \approx \Delta S_i. \tag{11.3}$$

Обозначив через γ_i острый угол между осью Oz и нормалью $\bar{n}_i$ к поверхности в точке M_i, получаем:

$$\Delta T_i \cdot \cos\gamma_i = \Delta\sigma_i \tag{11.4}$$

(область σ_i есть проекция T_i на плоскость Oxy).

Рис. 36.

Если поверхность S задана уравнением $z = z(x;y)$, то, как известно (см. Часть 1, (45.2)), уравнение касательной плоскости в точке M_i есть

$$z'_x(x_i;y_i)\cdot(x-x_i) + z'_y(x_i;y_i)\cdot(y-y_i) - (z-z_i) = 0,$$

где $z'_x(x_i;y_i)$, $z'_y(x_i;y_i)$, -1 — координаты нормального вектора к плоскости. Острый угол γ_i есть угол между векторами $\bar{k} = (0;0;1)$ и $\bar{n}_i = (-z'_x(x_i;y_i); -z'_y(x_i;y_i); 1)$. Следовательно,

$$\cos\gamma_i = \frac{\bar{k}\bar{n}_i}{|\bar{k}|\cdot|\bar{n}_i|} = \frac{1}{\sqrt{1 + z'^2_x(x_i;y_i) + z'^2_y(x_i;y_i)}}.$$

Равенство (11.4) принимает вид

$$\Delta T_i = \sqrt{1 + z'^2_x(x_i;y_i) + z'^2_y(x_i;y_i)}\,\Delta\sigma_i.$$

В правой части формулы (11.2) заменим ΔS_i (учитывая (11.3)) на полученное выражение для ΔT_i, а z_i заменим на $z(x_i;y_i)$. Поэтому, переходя к пределу при стремлении к нулю наибольшего диаметра S_i (а следовательно, и σ_i), получаем формулу

$$\iint\limits_S f(x;y;z)\,ds = \iint\limits_D f(x;y;z(x;y))\cdot\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}\,dx\,dy, \tag{11.5}$$

выражающую интеграл по поверхности S через двойной интеграл по проекции S на плоскость Oxy.

Отметим, что если поверхность S задана уравнением вида $y = y(x;z)$ или $x = x(y;z)$, то аналогично получим:

$$\iint\limits_S f(x;y;z)\,ds = \iint\limits_{D_1} f(x;y(x;z);z)\cdot\sqrt{1 + y'^2_x + y'^2_z}\,dx\,dz$$

и

$$\iint\limits_S f(x;y;z)\,ds = \iint\limits_{D_2} f(x(y;z);y;z)\cdot\sqrt{1 + x'^2_y + x'^2_z}\,dy\,dz, \tag{11.6}$$

где D_1 и D_2 — проекции поверхности S на координатные плоскости Oxz и Oyz соответственно.

Пример 11.1. Вычислить $I = \iint\limits_S (x - 3y + 2z)\,ds$, где S — часть плоскости $4x + 3y + 2z - 4 = 0$, расположенной в I октанте (см. рис. 37).

Решение: Запишем уравнение плоскости в виде $z = 2 - 2x - \frac{3}{2}y$. Находим $z_x' = -2$, $z_y' = -\frac{3}{2}$. По формуле (11.5) имеем:

$$I = \iint\limits_D (x - 3y + 4 - 4x - 3y) \cdot \sqrt{1 + 4 + \frac{9}{4}}\, dx\, dy =$$

$$= \frac{\sqrt{29}}{2} \iint\limits_D (4 - 3x - 6y)\, dx\, dy =$$

$$= \frac{\sqrt{29}}{2} \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\frac{4}{3}(1-x)} (4 - 3x - 6y)\, dy =$$

Рис. 37.

$$= \frac{\sqrt{29}}{2} \int\limits_0^1 dx (4y - 3xy - 3y^2)\Big|_0^{\frac{4}{3}(1-x)} =$$

$$= \frac{\sqrt{29}}{2} \int\limits_0^1 \Big(\frac{16}{3}(1-x) - 4x(1-x) - \frac{16}{3}(1-x)^2\Big) dx =$$

$$= \frac{\sqrt{29}}{2} \Big(-\frac{16}{3} \cdot \frac{(1-x)^2}{2} - 2x^2 + 4 \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{16}{3} \cdot \frac{(1-x)^3}{3}\Big)\Big|_0^1 = \frac{\sqrt{29}}{9}.$$ ●

Пример 11.2. Вычислить

$$I = \iint\limits_S x(y+z)\, ds,$$

где S — часть цилиндрической поверхности $x = \sqrt{1 - y^2}$, отсеченной плоскостями $z = 0$, $z = 2$ (см. рис. 38).

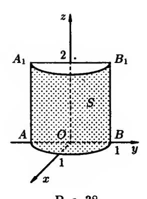


Рис. 38.

Решение: Воспользуемся формулой (11.6). Поскольку $x_y' = -\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$, $x_z' = 0$, то

$$I = \iint\limits_{D_1} \sqrt{1 - y^2} \cdot (y + z) \cdot \sqrt{1 + \frac{y^2}{1 - y^2}}\, dy\, dz =$$

$$= \iint\limits_{D_1} (y + z)\, dy\, dz = \int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_0^2 (y + z)\, dz =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} \Big(yz + \frac{z^2}{2}\Big)\Big|_0^2 dy = \int\limits_{-1}^{1} (2y + 2)\, dy = 4,$$

где D_1 — прямоугольник AA_1B_1B. ●

11.3. Некоторые приложения поверхностного интеграла I рода

Приведем некоторые примеры применения поверхностного интеграла I рода.

Площадь поверхности

Если поверхность S задана уравнением $z = z(x;y)$, а ее проекция на плоскость Oxy есть область D, в которой $z(x;y)$, $z_x'(x;y)$ и $z_y'(x;y)$ — непрерывные функции, то ее площадь S вычисляется по формуле

$$S = \iint\limits_S ds,$$

или $S = \iint\limits_D \sqrt{1 + {z_x'}^2 + {z_y'}^2}\, dx\, dy$.

Кроме того, поверхностный интеграл применяют для вычисления массы, координат центра масс, моментов инерции материальных поверхностей с известной поверхностной плотностью распределения массы $\gamma = \gamma(x;y;z)$. Все эти величины определяются одним и тем же способом: данную область разбивают на конечное число «мелких» частей, делая для каждой области деления упрощающие задачу предположения; находят приближенное значение искомой величины; переходят к пределу при неограниченном измельчении области деления. Проиллюстрируем описанный способ на примере определения массы материальной поверхности.

Масса поверхности

Пусть плотность распределения массы материальной поверхности есть $\gamma = \gamma(x;y;z)$. Для нахождения массы поверхности:

1. Разбиваем поверхность S на n частей S_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, площадь которой обозначим ΔS_i.

2. Берем произвольную точку $M_i(x_i;y_i;z_i)$ в каждой области S_i. Предполагаем, что в пределах области S_i плотность постоянна и равна значению ее в точке M_i.

3. Масса m_i области S_i мало отличается от массы $\gamma(x_i;y_i;z_i)\Delta S_i$ фиктивной однородной области с постоянной плотностью $\gamma = \gamma(x_i;y_i;z_i)$.

4. Суммируя m_i по всей области, получаем: $m \approx \sum\limits_{i=1}^{n} \gamma(x_i;y_i;z_i)\Delta S_i$.

5. За точное значение массы материальной поверхности S принимается предел, к которому стремится полученное приближенное значение при стремлении к нулю диаметров областей S_i, т. е.

$$m = \lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \gamma(x_i;y_i;z_i)\Delta S_i,$$

т. е.

$$m = \iint\limits_S \gamma(x;y;z)\, ds. \qquad (11.7)$$

Статистические моменты, координаты центра тяжести, моменты инерции материальной поверхности S находятся по соответствующим формулам:

$$S_{xy} = \iint\limits_S z \cdot \gamma(x;y;z)\,ds, \qquad M_x = \iint\limits_S (y^2+z^2)\cdot\gamma(x;y;z)\,ds,$$

$$S_{yz} = \iint\limits_S x \cdot \gamma(x;y;z)\,ds, \qquad M_y = \iint\limits_S (x^2+z^2)\cdot\gamma(x;y;z)\,ds,$$

$$S_{xz} = \iint\limits_S y \cdot \gamma(x;y;z)\,ds, \qquad M_z = \iint\limits_S (x^2+y^2)\cdot\gamma(x;y;z)\,ds,$$

$$x_c = \frac{S_{yz}}{m}, \quad y_c = \frac{S_{xz}}{m}, \quad z_c = \frac{S_{xy}}{m}, \qquad M_O = \iint\limits_S (x^2+y^2+z^2)\cdot\gamma(x;y;z)\,ds.$$



Пример 11.3. Найти массу полусферы радиуса R, если в каждой точке поверхности плотность численно равна расстоянию этой точки от радиуса, перпендикулярного основанию полусферы.

❍ Решение: На рисунке 39 изображена полусфера радиуса R. Ее уравнение $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$; $\gamma = \sqrt{x^2+y^2}$ — поверхностная плотность полусферы.

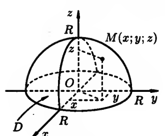


Рис. 39.

По формуле (11.7) находим:

$$m = \iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2}\,ds =$$

$$= \iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{R^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy =$$

$$= R\iint\limits_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}}\,dx\,dy.$$

Переходим к полярным координатам:

$$m = R\iint\limits_D \frac{r}{\sqrt{R^2-r^2}}\cdot r\,dr\,d\varphi = R\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int\limits_0^R \frac{r^2}{\sqrt{R^2-r^2}}dr = \frac{\pi^2 R^3}{2}.$$

Внутренний интеграл вычислен с помощью подстановки $r = R\sin t$:

$$\int\limits_0^R \frac{r^2}{\sqrt{R^2-r^2}}\,dr = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{R^2\sin^2 t}{R\cos t}\cdot R\cos t\,dt = R^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt =$$

$$= R^2\left(\frac{1}{2}t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = R^2\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \frac{\pi R^2}{4}. \qquad \bullet$$

§ 12. ПОВЕРХНОСТНЫЙ ИНТЕГРАЛ II РОДА

12.1. Основные понятия

Поверхностный интеграл II рода строится по образцу криволинейного интеграла II рода, где направленную кривую разлагали на элементы и проектировали их на координатные оси; знак брали в зависимости от того, совпадало ли ее направление с направлением оси или нет.

Пусть задана ***двусторонняя поверхность*** (таковой является плоскость, эллипсоид, любая поверхность, задаваемая уравнением $z = f(x; y)$, где $f(x; y)$, $f_x{}'$ и $f_y{}'$ — функции, непрерывные в некоторой области D плоскости Oxy и т. д.). После обхода такой поверхности, не пересекая ее границы, направление нормали к ней не меняется. Примером *односторонней* поверхности является так называемый *лист Мебиуса*, получающийся при склеивании сторон AB и CD прямоугольника $ABCD$ так, что точка A совмещается с точкой C, а B — с D (см. рис. 40).

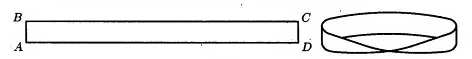


Рис. 40.

Далее, пусть в точках рассматриваемой двусторонней поверхности S в пространстве $Oxyz$ определена непрерывная функция $f(x; y; z)$. Выбранную сторону поверхности (в таком случае говорят, что поверхность *ориентирована*) разбиваем на части S_i, где $i = 1, 2, \ldots, n$, и проектируем их на координатные плоскости. При этом площадь проекции $\Delta\sigma_i$ берем со знаком «плюс», если выбрана верхняя сторона поверхности, или, что то же самое, если нормаль $\bar{n}$ к выбранной стороне поверхности составляет с осью Oz острый угол (см. рис. 41, *а*), т. е. $\cos\gamma_i > 0$; со знаком «минус», если выбрана нижняя сторона поверхности (или $\cos\gamma_i < 0$) (см. рис. 41, *б*). В этом случае интегральная сумма имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i; y_i; z_i)\Delta\sigma_i, \tag{12.1}$$

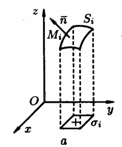
где $\Delta\sigma_i = (S_i)_{Oxy}$ — площадь проекции S_i на плоскость Oxy. Ее отличие от интегральной суммы (11.1) очевидно.

Предел интегральной суммы (12.1) при $\lambda = \max d_i \to 0$, если он существует и не зависит от способа разбиения поверхности S на части S_i и от выбора точек $M_i \in S_i$, называется *поверхностным интегралом II рода* (по координатам) от функции $f(x; y; z)$ по переменным x и y по выбранной стороне поверхности и обозначается

$$\iint\limits_S f(x; y; z)\,dx\,dy.$$

Итак,

$$\boxed{\iint\limits_S f(x; y; z)\,dx\,dy = \lim_{\substack{\lambda\to 0\\(n\to\infty)}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i; y_i; z_i)\Delta\sigma_i.}$$



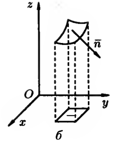


Рис. 41.

Аналогично определяются поверхностные интегралы II рода по переменным y и z и z и x:

$$\iint\limits_S f(x;y;z)\,dy\,dz = \lim_{\substack{\lambda\to 0\\(n\to\infty)}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i;y_i;z_i)\cdot(S_i)_{Oyz},$$

$$\iint\limits_S f(x;y;z)\,dx\,dz = \lim_{\substack{\lambda\to 0\\(n\to\infty)}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i;y_i;z_i)\cdot(S_i)_{Oxz}.$$

Общим видом поверхностного интеграла II рода служит интеграл

$$\iint\limits_S P(x;y;z)\,dy\,dz + Q(x;y;z)\,dz\,dx + R(x;y;z)\,dx\,dy$$

$$\left(= \iint\limits_S P\,dy\,dz + \iint\limits_S Q\,dz\,dx + \iint\limits_S R\,dx\,dy\right),$$

где P, Q, R — непрерывные функции, определенные в точках двусторонней поверхности S.

Отметим, что если S — замкнутая поверхность, то поверхностный интеграл по внешней стороне ее обозначается $\oiint\limits_S$, по внутренней $\oiint\limits_{-S}$.

Из определения поверхностного интеграла II рода вытекают следующие его свойства:

1. Поверхностный интеграл II рода изменяет знак при перемене стороны поверхности.

2. Постоянный множитель можно выносить за знак поверхностного интеграла.

3. Поверхностный интеграл от суммы функций равен сумме соответствующих интегралов от слагаемых.

4. Поверхностный интеграл II рода по всей поверхности $S = S_1 + S_2$ равен сумме интегралов по ее частям S_1 и S_2 (аддитивное свойство), если S_1 и S_2 пересекаются лишь по границе, их разделяющей.

5. Если S_1, S_2, S_3 — цилиндрические поверхности с образующими, параллельными соответственно осям Oz, Ox, Oy, то

$$\iint\limits_{S_1} R(x;y;z)\,dx\,dy = \iint\limits_{S_2} P(x;y;z)\,dy\,dz = \iint\limits_{S_3} Q(x;y;z)\,dx\,dz = 0.$$

12.2. Вычисление поверхностного интеграла II рода

Вычисление поверхностного интеграла II рода сводится к вычислению двойного интеграла.

Пусть функция $R(x;y;z)$ непрерывна во всех точках поверхности S, заданной уравнением $z = z(x;y)$, где $z(x;y)$ — непрерывная функция в замкнутой области D (или D_{xy}) — проекции поверхности S на плоскость Oxy.

Выберем ту сторону поверхности S, где нормаль к ней образует с осью Oz острый угол. Тогда $\Delta\sigma_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Так как $z_i = z(x_i;y_i)$, то интегральная сумма (12.1) может быть записана в виде

$$\sum_{i=1}^{n} R(x_i;y_i;z_i)\Delta\sigma_i = \sum_{i=1}^{n} R\big(x_i;y_i;z(x_i;y_i)\big)\Delta\sigma_i. \qquad (12.2)$$

Правая часть этого равенства есть интегральная сумма для функции $R(x;y;z(x;y))$, непрерывной в области D. Переходя к пределу в равенстве (12.2) при $\lambda \to 0$, получаем формулу

$$\iint\limits_S R(x;y;z)\,dx\,dy = \iint\limits_D R\big(x;y;z(x;y)\big)\,dx\,dy, \qquad (12.3)$$

выражающую поверхностный интеграл II рода по переменным x и y через двойной интеграл. Если выбрать вторую сторону, т. е. нижнюю, поверхности S, то полученный двойной интеграл берут со знаком «минус». Поэтому

$$\iint\limits_S R(x;y;z)\,dx\,dy = \pm\iint\limits_D R\big(x;y;z(x;y)\big)\,dx\,dy. \qquad (12.4)$$

Аналогично

$$\iint\limits_S Q(x;y;z)\,dx\,dz = \pm\iint\limits_{D_{xz}} Q\big(x;y(x;z);z\big)\,dx\,dz, \qquad (12.5)$$

$$\iint\limits_S P(x;y;z)\,dy\,dz = \pm\iint\limits_{D_{yz}} P\big(x(y;z);y;z\big)\,dy\,dz, \qquad (12.6)$$

где D_{xz} и D_{yz} — проекции поверхности S на плоскости Oxz и Oyz соответственно (замкнутые области).

В формуле (12.5) поверхность S задана уравнением $y = y(x;z)$, а в формуле (12.6) — уравнением $x = x(y;z)$. Знаки перед интегралами выбираются в зависимости от ориентации поверхности S (так, в формуле (12.5) берем знак «плюс», если нормаль к поверхности образует с осью Oy острый угол, а знак «минус» — если тупой угол).

Для вычисления общего поверхностного интеграла II рода используют формулы (12.4)–(12.6), проектируя поверхность S на все три координатные

плоскости:

$$\iint\limits_S P(x;y;z)\,dy\,dz + Q(x;y;z)\,dx\,dz + R(x;y;z)\,dx\,dy =$$

$$= \pm \iint\limits_{D_{yz}} P\big(x(y;z);y;z\big)\,dy\,dz \pm$$

$$\pm \iint\limits_{D_{xz}} Q\big(x;y(x;z);z\big)\,dx\,dz \pm \iint\limits_{D_{xy}} R\big(x;y;z(x;y)\big)\,dx\,dy.$$

Замечание. Можно показать справедливость равенств

$$dx\,dy = \cos\gamma\cdot ds,\quad dx\,dz = \cos\beta\cdot ds,\quad dy\,dz = \cos\alpha\cdot ds, \tag{12.7}$$

где ds — элемент площади поверхности S; $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы нормали $\bar{n}$ к выбранной стороне поверхности S.

Поверхностные интегралы I и II рода связаны соотношением

$$\iint\limits_S P\,dy\,dz + Q\,dx\,dz + R\,dx\,dy = \iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,ds. \tag{12.8}$$

Пример 12.1. Вычислить

$$I_1 = \iint\limits_S -x\,dy\,dz + z\,dz\,dx + 5\,dx\,dy$$

по верхней стороне части плоскости $2x-3y+z=6$, лежащей в IV октанте.

○ Решение: На рисунке 42 изображена заданная часть плоскости. Нормаль $\bar{n}$, соответствующая указанной стороне поверхности, образует с осью Oy тупой угол, а с осями Ox и Oz — острые. В этом можно убедиться, найдя направляющие косинусы нормального вектора $\bar{n} = (2;-3;1)$ плоскости:

$$|\bar{n}| = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14},\quad \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{14}} > 0,$$

$$\cos\beta = -\frac{3}{\sqrt{14}} < 0,\quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{14}} > 0.$$

Рис. 42.

Поэтому перед двойными интегралами в формулах (12.4) и (12.6) следует брать знак «плюс», а в формуле (12.5) — знак «минус». Следовательно,

$$I_1 = +\iint\limits_{D_{yz}} \left(-3 - \frac{3}{2}y + \frac{z}{2}\right) dy\,dz - \iint\limits_{D_{xz}} z\,dz\,dx + 5\iint\limits_{D_{xy}} dx\,dy =$$

$$= \int\limits_{-2}^{0} dy \int\limits_{0}^{3y+6} \left(-3 - \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}z\right) dz - \int\limits_{0}^{3} dx \int\limits_{0}^{6-2x} z\,dz + 5\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3 = -9. \quad \bullet$$

12.3. Формула Остроградского–Гаусса

Связь между поверхностным интегралом II рода по замкнутой поверхности и тройным интегралом по объему, ограниченному этой поверхностью устанавливает следующая теорема.

Теорема 12.1. Если функции $P(x;y;z)$, $Q(x;y;z)$, $R(x;y;z)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка в пространственной области V, то имеет место формула

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz = \oiint\limits_S P\,dy\,dz + Q\,dx\,dz + R\,dx\,dy, \qquad (12.9)$$

где S — граница области V и интегрирование по S производится по ее внешней стороне.

Формула (12.9) называется *формулой Остроградского–Гаусса* (является аналогом формулы Остроградского–Грина (см. п. 10.3).

☐ Пусть область V ограничена снизу поверхностью S_1, уравнение которой $z=z_1(x;y)$; сверху — поверхностью S_2, уравнение которой $z=z_2(x;y)$ (функции $z_1(x;y)$ и $z_2(x;y)$ непрерывны в замкнутой области D — проекции V на плоскость Oxy, $z_1(x;y)\leqslant z_2(x;y)$); сбоку — цилиндрической поверхностью S_3, образующие которой параллельны оси Oz (см. рис. 43).

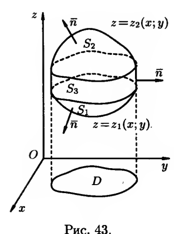


Рис. 43.

Рассмотрим тройной интеграл

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z}dx\,dy\,dz = \iint\limits_D dx\,dy \int\limits_{z_1(x;y)}^{z_2(x;y)} \frac{\partial R}{\partial z}dz =$$

$$= \iint\limits_D R(x;y;z_2(x;y))\,dx\,dy - \iint\limits_D R(x;y;z_1(x;y))\,dx\,dy.$$

Двойные интегралы в правой части равенства заменим поверхностными интегралами II рода по внешней стороне поверхностей S_1 и S_2 соответственно (см. (12.3)). Получаем:

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z}dx\,dy\,dz = \iint\limits_{S_2} R\,dx\,dy + \iint\limits_{S_1} R\,dx\,dy.$$

Добавляя равный нулю интеграл $\iint\limits_{S_3} R\,dx\,dy$ по внешней стороне S_3 (см. свойство 5 п. 12.1), получим:

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z}dx\,dy\,dz = \iint\limits_{S_2} R\,dx\,dy + \iint\limits_{S_1} R\,dx\,dy + \iint\limits_{S_3} R\,dx\,dy,$$

или

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z} dx\,dy\,dz = \oiint\limits_S R(x;y;z)\,dx\,dy, \qquad (12.10)$$

где S — поверхность, ограничивающая область V.

Аналогично доказываются формулы

$$\iiint\limits_V \frac{\partial Q}{\partial y} dx\,dy\,dz = \oiint\limits_S Q(x;y;z)\,dx\,dz, \qquad (12.11)$$

$$\iiint\limits_V \frac{\partial P}{\partial x} dx\,dy\,dz = \oiint\limits_S P(x;y;z)\,dy\,dz. \qquad (12.12)$$

Складывая почленно равенства (12.10), (12.11) и (12.12), получаем формулу (12.9) Остроградского–Гаусса. ■

Замечания.

1. Формула (12.9) остается справедливой для любой области V, которую можно разбить на конечное число областей рассмотренного вида.

2. Формулу Остроградского–Гаусса можно использовать для вычисления поверхностных интегралов II рода по замкнутым поверхностям.

Пример 12.2. Вычислить $I = \oiint\limits_{+S} -x\,dy\,dz + z\,dz\,dx + 5\,dx\,dy$, где S — внешняя сторона пирамиды, ограниченной плоскостями $2x - 3y + z = 6$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Решение: По формуле (12.9) находим:

$$I = \iiint\limits_V (-1+0+0)\,dx\,dy\,dz = -\iiint\limits_V dv = -\frac{1}{3}\cdot 3\cdot 6 = -6. \qquad ●$$

Заметим, что интеграл I_1 (см. пример 12.1) можно вычислить иначе:

$$I_1 = I - \iint\limits_{S_2} - \iint\limits_{S_3} - \iint\limits_{S_4},$$

где поверхности S_2, S_3, S_4 есть соответственно треугольники OAC, AOB, COB (см. рис. 44).

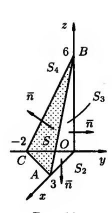


Рис. 44.

Имеем:

$$I_1 = -6 + \iint\limits_{(OAC)} 5\,dx\,dy - \iint\limits_{(AOB)} z\,dz\,dx + \iint\limits_{(COB)} (-0)\,dy\,dz =$$

$$= -6 + 5\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3 - \int\limits_0^3 dx \int\limits_0^{6-2x} z\,dz =$$

$$= +9 - \frac{1}{2}\int\limits_0^3 (6-2x)^2\,dx = 9 - \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{(6-2x)^3}{3}\Big|_0^3 = -9.$$

12.4. Формула Стокса

Связь между поверхностными и криволинейными интегралами II рода устанавливает следующая теорема.

Теорема 12.2. Если функции $P(x;y;z)$, $Q(x;y;z)$ и $R(x;y;z)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка в точках ориентированной поверхности S, то имеет место формула

$$\iint\limits_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\,dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dx\,dz =$$

$$= \oint\limits_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz, \quad (12.13)$$

где L — граница поверхности S и интегрирование вдоль кривой L производится в положительном направлении (т. е. при обходе границы L поверхность S должна оставаться все время слева).

Формула (12.13) называется *формулой Стокса* (Д. Г. Стокс — английский математик, физик).

❑ Пусть $z=f(x;y)$ — уравнение поверхности S, функции $f(x;y)$, $f_x'(x;y)$, $f_y'(x;y)$ непрерывны в замкнутой области D (проекции поверхности S на плоскость Oxy), L_1 — граница области D (см. рис. 45). Будем считать, что поверхность S пересекается с любой прямой, параллельной оси Oz, не более чем в одной точке. Выберем верхнюю сторону поверхности S. Рассмотрим сначала интеграл вида $\oint\limits_L P(x;y;z)\,dx$.

Рис. 45.

Значения функции $P(x;y;z)$ на L равны значениям функции $P(x;y;z(x;y))$ на L_1. Интегральные суммы для криволинейных интегралов II рода по контурам L и L_1 совпадают. Поэтому

$$\oint\limits_L P(x;y;z)\,dx = \oint\limits_{L_1} P(x;y;z(x;y))\,dx.$$

Применим к этому интегралу формулу Остроградского–Грина (см. п. 10.3). Тогда получим:

$$\int\limits_{L_1} P(x;y;z(x;y))dx = \iint\limits_D \left(0 - \frac{\partial}{\partial y}\big(P(x;y;z(x;y))\big)\right) dx\,dy =$$

$$= -\iint\limits_D \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

Преобразуем полученный двойной интеграл в равный ему поверхностный интеграл II рода (см. п. 12.2). Для этого последнее равенство перепишем в виде

$$\int\limits_{L_1} P(x;y;z(x;y))\,dx = -\iint\limits_S \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right) \cos\gamma ds$$

(см. 12.7) и используем уравнение нормали к поверхности S (см. Часть 1, (45.3)). Так как выбрана верхняя сторона поверхности S, т. е. $\cos\gamma > 0$ (γ — острый угол между нормалью $\bar{n}$ к поверхности S и осью Oz), то нормаль $\bar{n}$ имеет проекции $-\frac{\partial z}{\partial x}$, $-\frac{\partial z}{\partial y}$, 1. Направляющие косинусы пропорциональны соответствующим проекциям:

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = -\frac{\partial z}{\partial x} : -\frac{\partial z}{\partial y} : 1.$$

Отсюда $-\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}$. Тогда

$$-\iint\limits_S \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right)\cos\gamma\,ds = -\iint\limits_S \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\right)\cos\gamma\,ds =$$

$$= -\iint\limits_S \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\,ds - \frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta\,ds = \iint\limits_S \frac{\partial P}{\partial z}dx\,dz - \frac{\partial P}{\partial y}dx\,dy.$$

Следовательно,

$$\oint\limits_L P(x;y;z)\,dx = \iint\limits_S \frac{\partial P}{\partial z}dx\,dz - \frac{\partial P}{\partial y}dx\,dy.$$

Аналогично получаются при соответствующих условиях еще два равенства:

$$\oint\limits_L Q(x;y;z)\,dy = \iint\limits_S \frac{\partial Q}{\partial x}dx\,dy - \frac{\partial Q}{\partial z}dy\,dz,$$

$$\oint\limits_L R(x;y;z)\,dz = \iint\limits_S \frac{\partial R}{\partial y}dy\,dz - \frac{\partial R}{\partial x}dx\,dz.$$

Складывая почленно три последних равенства, получаем формулу Стокса (12.13). ■

Отметим, что формулу Стокса (12.13) можно применить и для поверхностей более сложного вида (разбив ее на части рассмотренного выше типа).

Формулу Стокса можно применять для вычисления криволинейного интеграла по замкнутому контуру с помощью поверхностного интеграла.

Из формулы Стокса вытекает, что если выполняются условия

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$$

(см. п. 10.4), то криволинейный интеграл по произвольному пространственному замкнутому контуру L равен нулю: $\oint\limits_L P\,dx + Q\,dy + P\,dz = 0$. Следовательно, в данном случае криволинейный интеграл не зависит от вида пути интегрирования.

Пример 12.3. Вычислить $I = \oint\limits_L x^2y^3\,dx + dy + z\,dz$, где контур L — окружность $x^2 + y^2 = R^2$; $z = 0$: а) непосредственно, б) используя формулу Стокса, взяв в качестве поверхности полусферу $z = +\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

○ Решение: Поверхность интегрирования изображена на рисунке 46.

а) Запишем уравнение окружности в параметрической форме:

$$x = R\cos t, \quad y = R\sin t, \quad z \equiv 0, \quad t \in [0; 2\pi].$$

По формуле (10.7) имеем:

$$I = \int_0^{2\pi} R^2\cos^2 t \cdot R^3\sin^3 t(-R\sin t)\cdot dt + \int_0^{2\pi} R\cos t\, dt =$$

$$= -R^6\int_0^{2\pi}\sin^4 t\cos^2 t\, dt + 0 = -R^6\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}\sin 2t\right)^2\cdot\frac{1}{2}\cdot(1-\cos 2t)dt =$$

$$= -\frac{R^6}{8}\cdot\int_0^{2\pi}\sin^2 2t\, dt + \frac{R^6}{8}\int_0^{2\pi}\sin^2 2t\cos 2t\, dt =$$

$$= -\frac{R^6}{16}\int_0^{2\pi}(1-\cos 4t)\, dt + 0 = -\frac{R^6}{16}2\pi = -\frac{\pi R^6}{8}.$$

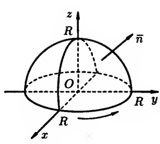


Рис. 46.

б) По формуле Стокса (12.13) находим:

$$I = \iint_S (0-0)\, dy\, dz + (0-0)\, dx\, dz + (0 - 3x^2y^2)\, dx\, dy =$$

$$= -3\iint_S x^2y^2\, dx\, dy = -3\iint_D x^2y^2\, dx\, dy.$$

Переходя к полярным координатам, получаем:

$$I = -3\iint_D r^5\sin^2\varphi\cdot\cos^2\varphi\, dr\, d\varphi = -3\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\cos^2\varphi\, d\varphi\cdot\int_0^R r^5\, dr =$$

$$= -\frac{3}{6}R^6\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}\cdot\sin^2 2\varphi\, d\varphi = -\frac{1}{8}R^6\cdot\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos 4\varphi)\, d\varphi =$$

$$= -\frac{R^6}{16}\cdot\varphi\Big|_0^{2\pi} + 0 = -\frac{\pi R^6}{8}.$$ ●

12.5. Некоторые приложения поверхностного интеграла II рода

С помощью поверхностного интеграла II рода можно найти объем тела, ограниченного сверху поверхностью S_2 $(z = z_2(x; y))$, снизу — поверхностью S_1 $(z = z_1(x; y))$, сбоку — цилиндрической поверхностью S_3, образующие которой параллельны оси Oz:

$$V = \frac{1}{3}\oiint_S x\, dy\, dz + y\, dz\, dx + z\, dx\, dy, \qquad (12.14)$$

где $S = S_1 + S_2 + S_3$.

Действительно, положив в формуле Остроградского–Гаусса (12.9) $P(x;y;z) = x$, $Q(x;y;z) = 0$, $R(x;y;z) = 0$, находим:

$$\oiint_S x\,dy\,dz = \iiint_V dx\,dy\,dz, \quad \text{т. е.} \quad V = \oiint_S x\,dy\,dz. \tag{12.15}$$

Аналогично, полагая $P = 0$, $Q = y$, $R = 0$, находим еще одну формулу для нахождения объема тела с помощью поверхностного интеграла II рода:

$$V = \oiint_S y\,dx\,dz. \tag{12.16}$$

Наконец, положив $P = 0$, $Q = 0$, $R = z$, по формуле (12.9) находим третью формулу

$$V = \oiint_S z\,dx\,dy, \tag{12.17}$$

выражающую объем тела через поверхностный интеграл II рода.

Сложив почленно равенства (12.15)–(12.17) и разделив на три, получим формулу (12.14).

Другие применения поверхностного интеграла II рода рассмотрим в главе VII «Элементы теории поля».

Глава IV. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

Лекции 15–16

§ 13. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

13.1. Основные понятия

Бесконечные ряды широко используются в теоретических исследованиях математического анализа, имеют разнообразные практические применения.

Числовым рядом (или просто *рядом*) называется выражение вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \ldots, \tag{13.1}$$

где $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ — действительные или комплексные числа, называемые ***членами ряда***, u_n — ***общим членом*** ряда.

Ряд (13.1) считается заданным, если известен общий член ряда u_n, выраженный как функция его номера n: $u_n = f(n)$.

Сумма первых n членов ряда (13.1) называется n-й ***частичной суммой*** ряда и обозначается через S_n, т. е. $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

Рассмотрим частичные суммы

$$S_{\text{I}} = u_1, \quad S_2 = u_1 + u_2, \quad S_3 = u_1 + u_2 + u_3, \ldots$$

Если существует конечный предел $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ последовательности частичных сумм ряда (13.1), то этот предел называют ***суммой ряда*** (13.1) и говорят, что ряд ***сходится***. Записывают: $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует или $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, то ряд (13.1) называют ***расходящимся***. Такой ряд суммы не имеет.

Рассмотрим примеры.

1. Ряд $2 + 17 - 3\frac{1}{4} + 196 + \ldots$ нельзя считать заданным, а ряд $2 + 5 + 8 + \ldots$ — можно: его общий член задается формулой $u_n = 3n - 1$.

2. Ряд $0 + 0 + 0 + \cdots + 0 + \ldots$ сходится, его сумма равна 0.

3. Ряд $1 + 1 + 1 + \cdots + 1 + \ldots$ расходится, $S_n = n \to \infty$ при $n \to \infty$.

4. Ряд $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ расходится, так как последовательность частичных сумм $1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$ $(S_{\text{I}} = 1, S_2 = 0, S_3 = 1, \ldots)$ не имеет предела.

5. Ряд $\sum\limits_{n=\text{I}}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ сходится. Действительно,

$$S_1 = \frac{1}{1\cdot 2} = 1 - \frac{1}{2},$$

$$S_2 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{1}{3},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} =$$
$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Следовательно,
$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1,$$
т. е. ряд сходится, его сумма равна 1.

Рассмотрим некоторые важные свойства рядов.

Свойство 1. Если ряд (13.1) сходится и его сумма равна S, то ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} cu_n = cu_1 + cu_2 + \dots + cu_n + \dots, \tag{13.2}$$
где c — произвольное число, также сходится и его сумма равна cS. Если же ряд (13.1) расходится и $c \neq 0$, то и ряд (13.2) расходится.

❑ Обозначим n-ю частичную сумму ряда (13.2)через $S_n^{(u)}$. Тогда
$$S_n^{(u)} = cu_1 + cu_2 + \dots + cu_n = c(u_1 + u_2 + \dots + u_n) = c \cdot S_n.$$
Следовательно,
$$\lim_{n\to\infty} S_n^{(u)} = \lim_{n\to\infty} cS_n = c \cdot \lim_{n\to\infty} S_n = c \cdot S,$$
т. е. ряд (13.2) сходится и имеет сумму cS.

Покажем теперь, что если ряд (13.1) расходится, $c \neq 0$, то и ряд (13.2) расходится. Допустим противное: ряд (13.2) сходится и имеет сумму S_1. Тогда
$$S_1 = \lim_{n\to\infty} S_n^{(u)} = \lim_{n\to\infty} cS_n = c \lim_{n\to\infty} S_n.$$
Отсюда получаем:
$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{S_1}{c},$$
т. е. ряд (13.1) сходится, что противоречит условию о расходимости ряда (13.1). ■

Свойство 2. Если сходится ряд (13.1) и сходится ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n, \tag{13.3}$$
а их суммы равны S_1 и S_2 соответственно, то сходятся и ряды
$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n), \tag{13.4}$$
причем сумма каждого равна соответственно $S_1 \pm S_2$.

❑ Обозначим n-е частичные суммы рядов (13.1), (13.3) и (13.4) через $S_n^{(u)}$, $S_n^{(v)}$ и S_n соответственно. Тогда
$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (S_n^{(u)} \pm S_n^{(v)}) = \lim_{n\to\infty} S_n^{(u)} \pm \lim_{n\to\infty} S_n^{(v)} = S_1 \pm S_2,$$
т. е. каждый из рядов (13.4) сходится, и сумма его равна $S_1 \pm S_2$ соответственно. ■



Из свойства 2 вытекает, что сумма (разность) сходящегося и расходящегося рядов есть расходящийся ряд.

В справедливости этого утверждения можно убедиться методом от противного.

Заметим, что сумма (разность) двух расходящихся рядов может быть как сходящимся, так и расходящимся рядом.

Свойство 3. Если к ряду (13.1) прибавить (или отбросить) конечное число членов, то полученный ряд и ряд (13.1) сходятся или расходятся одновременно.

❏ Обозначим через S сумму отброшенных членов, через k — наибольший из номеров этих членов. Чтобы не менять нумерацию оставшихся членов ряда (13.1), будем считать, что на месте отброшенных членов поставили нули. Тогда при $n > k$ будет выполняться равенство $S_n - S'_n = S$, где S'_n — это n-я частичная сумма ряда, полученного из ряда (13.1) путем отбрасывания конечного числа членов. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S + \lim\limits_{n\to\infty} S'_n$. Отсюда следует, что пределы в левой и правой частях одновременно существуют или не существуют, т. е. ряд (13.1) сходится (расходится) тогда и только тогда, когда сходятся (расходятся) ряды без конечного числа его членов.

Аналогично рассуждаем в случае приписывания к ряду конечного числа членов. ■

Ряд

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \qquad (13.5)$$

называется n-м *остатком ряда* (13.1). Он получается из ряда (13.1) отбрасыванием n первых его членов. Ряд (13.1) получается из остатка добавлением конечного числа членов. Поэтому, согласно свойству 3, ряд (13.1) и его остаток (13.5) одновременно сходятся или расходятся.

Из свойства 3 также следует, что если ряд (13.1) сходится, то его остаток $r_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots$ стремится к нулю при $n \to \infty$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$.

13.2. Ряд геометрической прогрессии

Исследуем сходимость ряда

$$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \ldots \quad (a \neq 0), \qquad (13.6)$$

который называется *рядом геометрической прогрессии.* Ряд (13.6) часто используется при исследовании рядов на сходимость.

Как известно, сумма первых n членов прогрессии находится по формуле $S_n = \dfrac{a(1-q^n)}{1-q}$, $q \neq 1$. Найдем предел этой суммы:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{a}{1-q} - a \lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{1-q}.$$

Рассмотрим следующие случаи в зависимости от величины q:

1. Если $|q| < 1$, то $q^n \to 0$ при $n \to \infty$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q}$, ряд (13.6) сходится, его сумма равна $\frac{a}{1-q}$;

2. Если $|q| > 1$, то $q^n \to \infty$ при $n \to \infty$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, ряд (13.6) расходится;

3. Если $|q| = 1$, то при $q = 1$ ряд (13.6) принимает вид $a + a + a + \cdots \cdots + a + \cdots$, для него $S_n = n \cdot a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, т. е. ряд (13.6) расходится; при $q = -1$ ряд (13.6) принимает вид $a - a + a - a + \ldots$ — в этом случае $S_n = 0$ при четном n и $S_n = a$ при нечетном n. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует, ряд (13.6) расходится.



Итак, ряд геометрической прогрессии сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \geqslant 1$.

Пример 13.1. Показать, что ряд $2^3 + 2^2 + 2 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-3}} + \ldots$ сходится.

Решение: Данный ряд можно переписать так:

$$2^3 \cdot 1 + 2^3 \cdot \frac{1}{2} + 2^3 \cdot \frac{1}{2^2} + \cdots + 2^3 \cdot \frac{1}{2^n} + \ldots$$

Как видно, он представляет собой ряд геометрической прогрессии с $a = 2^3$ и $q = \frac{1}{2} < 1$. Этот ряд сходится согласно свойству 1 числовых рядов. ●

13.3. Необходимый признак сходимости числового ряда. Гармонический ряд

Нахождение n-й частичной суммы S_n и ее предела для произвольного ряда во многих случаях является непростой задачей. Поэтому для выяснения сходимости ряда устанавливают специальные ***признаки сходимости***. Первым из них, как правило, является необходимый признак сходимости.

Теорема 13.1. Если ряд (13.1) сходится, то его общий член u_n стремится к нулю, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Пусть ряд (13.1) сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Тогда и $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S$ (при $n \to \infty$ и $(n-1) \to \infty$). Учитывая, что $u_n = S_n - S_{n-1}$ при $n > 1$, получаем:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0. \quad ■$$

Следствие 13.1 (достаточное условие расходимости ряда). Если $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$ или этот предел не существует, то ряд расходится.

Действительно, если бы ряд сходился, то (по теореме) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. Но это противоречит условию. Значит, ряд расходится. ■

Пример 13.2. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{n+5}$.

Решение: Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{n+5}$ расходится, т. к.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n-2}{n+5} = 3 \neq 0,$$

т. е. выполняется достаточное условие расходимости ряда.

Пример 13.3. Исследовать сходимость ряда

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1 + \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(1+\frac{1}{n}\right)^n + \dots$$

Решение: Данный ряд расходится, т. к. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \neq 0.$

Теорема 13.1 дает необходимое условие сходимости ряда, но не достаточное: из условия $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ не следует, что ряд сходится. Это означает, что существуют расходящиеся ряды, для которых $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

В качестве примера рассмотрим так называемый *гармонический ряд*

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots} \qquad (13.7)$$

Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. Однако ряд (13.7) расходится. Покажем это.

Как известно (см. Часть 1, (17.14)), $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$. Отсюда следует, что при любом $n \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e$. Логарифмируя это неравенство по основанию e, получим:

$$n \cdot \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1,$$

т. е.

$$\frac{1}{n} > \ln\frac{n+1}{n}, \quad \frac{1}{n} > \ln(n+1) - \ln n.$$

Подставляя в полученное неравенство поочередно $n = 1, 2, \dots, n-1, n$, получим:

$$1 > \ln 2,$$
$$\frac{1}{2} > \ln 3 - \ln 2,$$
$$\frac{1}{3} > \ln 4 - \ln 3,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$\frac{1}{n} > \ln(n+1) - \ln n.$$

Сложив почленно эти неравенства, получим $S_n > \ln(n+1)$. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} \ln(n+1) = \infty$, получаем $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, т. е. гармонический ряд (13.7) расходится. ■

В качестве второго примера можно взять ряд

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots$$

Здесь $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$. Однако этот ряд расходится.

❑ Действительно,

$$S_n=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot n=\sqrt{n},$$

т. е. $S_n > \sqrt{n}$. Следовательно, $S_n \to \infty$ при $n \to \infty$, ряд расходится. ■

§ 14. ДОСТАТОЧНЫЕ ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ ЗНАКОПОСТОЯННЫХ РЯДОВ

Необходимый признак сходимости не дает, вообще говоря, возможности судить о том, сходится ли данный ряд или нет. Сходимость и расходимость ряда во многих случаях можно установить с помощью так называемых *достаточных признаков*.



Рассмотрим некоторые из них для ***знакоположительных*** рядов, т. е. рядов с неотрицательными членами (знакоотрицательный ряд переходит в знакоположительный путем умножения его на (-1), что, как известно, не влияет на сходимость ряда).

14.1. Признаки сравнения рядов

Сходимость или расходимость знакоположительного ряда часто устанавливается путем сравнения его с другим («эталонным») рядом, о котором известно, сходится он или нет. В основе такого сравнения лежат следующие теоремы.

Теорема 14.1. Пусть даны два знакоположительных ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \tag{14.1}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n. \tag{14.2}$$

Если для всех n выполняется неравенство

$$u_n \leqslant v_n, \tag{14.3}$$

то из сходимости ряда (14.2) следует сходимость ряда (14.1), из расходимости ряда (14.1) следует расходимость ряда (14.2).

❑ Обозначим n-е частичные суммы рядов (14.1) и (14.2) соответственно через $S_n^{(u)}$ и $S_n^{(v)}$. Из неравенства (14.3) следует, что

$$S_n^{(u)} \leqslant S_n^{(v)}. \tag{14.4}$$

Пусть ряд (14.2) сходится и его сумма равна S_2. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(v)} = S_2$. Члены ряда (14.2) положительны, поэтому $S_n^{(v)} < S_2$ и, следовательно, с учетом неравенства (14.4), $S_n^{(u)} \leqslant S_2$. Таким образом, последовательность $S_1^{(u)}, S_2^{(u)}, S_n^{(u)}, \ldots$ монотонно возрастает ($u_n > 0$) и ограничена сверху числом S_2. По признаку существования предела (см. Часть 1, теорема 15.3) последовательность $\{S_n^{(u)}\}$ имеет предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(n)} = S_1$, т. е. ряд (14.1) сходится.

Пусть теперь ряд (14.1) расходится. Так как члены ряда неотрицательны, в этом случае имеем $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(u)} = \infty$. Тогда, с учетом неравенства (14.4), получаем $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(v)} = \infty$, т. е. ряд (14.2) расходится. ■

Замечание. Теорема 14.1 справедлива и в том случае, когда неравенство (14.3) выполняется не для всех членов рядов (14.1) и (14.2), а начиная с некоторого номера N. Это вытекает из свойства 3 числовых рядов (см. п. 13.1).

Теорема 14.2 (предельный признак сравнения). Пусть даны два знакоположительных ряда (14.1) и (14.2). Если существует конечный, отличный от 0, предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = A$ $(0 < A < \infty)$, то ряды (14.1) и (14.2) сходятся или расходятся одновременно.

❑ По определению предела последовательности (см. Часть 1, п. 15.2) для всех n, кроме, возможно, конечного числа их, для любого $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство $\left|\frac{u_n}{v_n} - A\right| < \varepsilon$, или

$$(A - \varepsilon) \cdot v_n < u_n < (A + \varepsilon) \cdot v_n. \tag{14.5}$$

Если ряд (14.1) сходится, то из левого неравенства (14.5) и теоремы 14.1 вытекает, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (A-\varepsilon)v_n$ также сходится. Но тогда, согласно свойству 1 числовых рядов (см. п. 13.1), ряд (14.2) сходится.

Если ряд (14.1) расходится, то из правого неравенства (14.5), теоремы 14.1, свойства 1 вытекает, что и ряд (14.2) расходится.

Аналогично, если ряд (14.2) сходится (расходится), то сходящимся (расходящимся) будет и ряд (14.1). ■

Пример 14.1. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3+2^n}$.

❍ Решение: Сравним данный ряд с рядом геометрической прогрессии $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, который сходится ($q = \frac{1}{2} < 1$). Имеем $\frac{1}{3+2^n} < \frac{1}{2^n}$. Следовательно, данный ряд сходится. ●

Пример 14.2. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$.

○ Решение: Здесь $u_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$. Возьмем ряд с общим членом $v_n = \frac{1}{n}$, который расходится (гармонический ряд). Имеем $\frac{1}{\sqrt[3]{n}} \geqslant \frac{1}{n}$. Следовательно, данный ряд расходится. ●

Пример 14.3. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\frac{\pi}{5n}$.

○ Решение: Применим предельный признак сравнения. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{5n}}{\frac{1}{n}} = \frac{\pi}{5} \neq 0$ (см. Часть 1, пример 17.7), то по теореме 14.2 исходный ряд расходится, как сравнимый с гармоническим рядом. ●

14.2. Признак Даламбера

В отличие от признаков сравнения, где все зависит от догадки и запаса известных сходящихся и расходящихся рядов, признак Даламбера (1717–1783, французский математик) позволяет часто решить вопрос о сходимости ряда, проделав лишь некоторые операции над самим рядом.

Теорема 14.3. Пусть дан ряд (13.1) с положительными членами и существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = l$.
Тогда ряд сходится при $l < 1$ и расходится при $l > 1$.

□ Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, то по определению предела для любого $\varepsilon > 0$ найдется натуральное число N такое, что при $n > N$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - l\right| < \varepsilon \quad \text{или} \quad l - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < l + \varepsilon. \tag{14.6}$$

Пусть $l < 1$. Можно подобрать ε так, что число $l + \varepsilon < 1$. Обозначим $l + \varepsilon = q$, $q < 1$. Тогда из правой части неравенства (14.6) получаем $\frac{u_{n+1}}{u_n} < q$, или $u_{n+1} < q \cdot u_n$, $n > N$. В силу свойства 3 числовых рядов можно считать, что $u_{n+1} < q \cdot u_n$ для всех $n = 1, 2, 3, \ldots$ Давая номеру n эти значения, получим серию неравенств:

$$\begin{aligned}
&u_2 < q \cdot u_1,\\
&u_3 < q \cdot u_2 < q^2 u_1,\\
&u_4 < q \cdot u_3 < q^3 u_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&u_n < q \cdot u_n < q^{n-1} u_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

т. е. члены ряда $u_2 + u_3 + u_4 + \dots + u_n + \dots$ меньше соответствующих членов ряда $qu_1 + q^2u_1 + q^3u_1 + \dots + q^{n+1}u_1 + \dots$, который сходится как ряд геометрической прогрессии со знаменателем $0 < q < 1$. Но тогда, на основании признака сравнения, сходится ряд $u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$, следовательно, сходится и исходный ряд (13.1).

Пусть $l > 1$. В этом случае $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l > 1$. Отсюда следует, что, начиная с некоторого номера N, выполняется неравенство $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, или $u_{n+1} > u_n$, т. е. члены ряда возрастают с увеличением номера n. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$. На основании следствия из необходимого признака (см. п. 13.3) ряд (13.1) расходится. ■

Замечания.

1. Если $l = 1$, то ряд (13.1) может быть как сходящимся, так и расходящимся.

2. Признак Даламбера целесообразно применять, когда общий член ряда содержит выражение вида $n!$ или a^n.

Пример 14.4. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

Решение: Находим

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Так как $l = 0 < 1$, то данный ряд по признаку Даламбера сходится. ●

Пример 14.5. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2}$.

Решение: Вычисляем

$$l = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3^{n+1}}{(n+1)^2} : \frac{3^n}{n^2} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n \cdot 3 \cdot n^2}{3^n \cdot (n+1)^2} =$$

$$= 3 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 = 3 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} \right)^2 = 3.$$

Так как $l = 3 > 1$, то данный ряд по признаку Даламбера расходится. ●

14.3. Радикальный признак Коши

Иногда удобно пользоваться ***радикальным признаком Коши*** для исследования сходимости знакоположительного ряда. Этот признак во многом схож с признаком Даламбера, о чем говорят его формулировка и доказательство.

Теорема 14.4. Пусть дан ряд (13.1) с положительными членами и существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$.
Тогда ряд сходится при $l < 1$ и расходится при $l > 1$.

Как и для признака Даламбера, в случае, когда $l = 1$, вопрос о сходимости ряда остается открытым. Доказательство теоремы аналогично доказательству признака Даламбера. Поэтому опустим его.



Пример 14.6. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

Решение: Так как

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2},$$

то применим радикальный признак Коши к ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}.$$

Вычисляем

$$l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3^n} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{e} < 1.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ сходится, а значит, сходится и исходный ряд, согласно свойству 1 числовых рядов. ●

14.4. Интегральный признак Коши. Обобщенный гармонический ряд

Теорема 14.5. Если члены знакоположительного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ могут быть представлены как числовые значения некоторой непрерывной монотонно убывающей на промежутке $[1; +\infty)$ функции $f(x)$ так, что $u_1 = f(1), u_2 = f(2), \ldots, u_n = f(n), \ldots$, то:

1) если $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, то сходится и ряд (13.1);

2) если $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится, то расходится также и ряд (13.1).

О сходимости несобственных интегралов см. Часть 1, § 40.

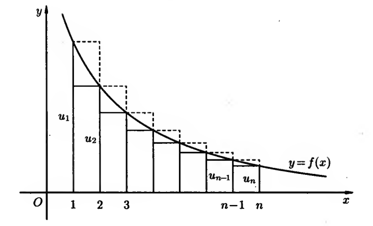


Рис. 47.

❑ Рассмотрим криволинейную трапецию, ограниченную сверху графиком функции $y = f(x)$, основанием которой служит отрезок оси Ox от $x = 1$ до $x = n$ (см. рис. 47).

Построим входящие и выходящие прямоугольники, основаниями которых служат отрезки $[1;2]$, $[2;3]$, ... Учитывая геометрический смысл определенного интеграла, запишем:

$$f(2)\cdot 1+f(3)\cdot 1+\dots+f(n)\cdot 1 < \int\limits_1^n f(x)\,dx < f(1)\cdot 1+f(2)\cdot 1+\dots+f(n-1)\cdot 1,$$

или

$$u_2+u_3+\dots+u_n < \int\limits_1^n f(x)\,dx < u_1+u_2+\dots+u_{n-1},$$

или

$$S_n - u_1 < \int\limits_1^n f(x)\,dx < S_n - u_n. \qquad (14.7)$$

Случай 1. Несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, т. е. $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx = A$. Поскольку $\int\limits_1^n f(x)\,dx < \int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx = A$, то с учетом неравенства (14.7) имеем: $S_n - u_1 < A$, т. е. $S_n < u_1 + A$. Так как последовательность частичных сумм монотонно возрастает и ограничена сверху (числом $u_1 + A$), то, по признаку существования предела, имеет предел. Следовательно, ряд (13.1) сходится.

Случай 2. Несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится. Тогда $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty$ и интегралы $\int\limits_1^n f(x)\,dx$ неограниченно возрастают при

$n \to \infty$. Учитывая, что $S_n > \int\limits_1^n f(x)\,dx + u_n$ (см. (14.7)), получаем, что $S_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Следовательно, данный ряд (13.1) расходится. ■

Замечание. Вместо интеграла $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ можно брать интеграл $\int\limits_k^{+\infty} f(x)\,dx$, где $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$. Отбрасывание k первых членов ряда в ряде (13.1), как известно, не влияет на сходимость (расходимость) ряда.

Пример 14.7. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$.

Решение: Воспользуемся интегральным признаком Коши. Функция $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ удовлетворяет условиям теоремы 14.5. Находим

$$\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \ln|\ln x|\Big|_2^{\infty} = \infty.$$

Значит, ряд с общим членом $u_n = \frac{1}{x \ln x}$ расходится. ●

Ряд

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots,} \qquad (14.8)$$

где $p > 0$ — действительное число, называется ***обобщенным гармоническим рядом.*** Для исследования ряда (14.8) на сходимость применим интегральный признак Коши (признаки Даламбера и Коши ответа о сходимости не дают).

Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{x^p}$. Эта функция непрерывна, монотонно убывает на промежутке $[1; +\infty)$ и $f(n) = \frac{1}{n^p} = u_n$. При $p \neq 1$ имеем:

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{a \to \infty} \int\limits_1^a x^{-p}\,dx = \lim_{a \to \infty} \frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_1^a =$$

$$= \lim_{a \to \infty} \left(\frac{a^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \right) = \begin{cases} \frac{1}{p-1}, & \text{если } p > 1, \\ \infty, & \text{если } p < 1. \end{cases}$$

При $p = 1$ имеем гармонический ряд $u_n = \frac{1}{n}$, который расходится (второй способ: $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \infty$). Итак, ряд (14.8) сходится при $p > 1$, расходится при $p \leqslant 1$. В частности, ряд $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$ сходится (полезно знать).

Рассмотренные признаки сходимости (есть и другие) знакоположительных рядов позволяют судить о сходимости практически любого положительного ряда. Необходимые навыки приобретаются на практике.

§ 15. ЗНАКОЧЕРЕДУЮЩИЕСЯ И ЗНАКОПЕРЕМЕННЫЕ РЯДЫ

15.1. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница

Рассмотрим важный класс рядов, называемых знакочередующимися. *Знакочередующимся рядом* называется ряд вида

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + (-1)^{n+1}u_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n, \qquad (15.1)$$

где $u_n > 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$ (т. е. ряд, положительные и отрицательные члены которого следуют друг за другом поочередно).

Для знакочередующихся рядов имеет место *достаточный* признак сходимости (установленный в 1714 г. Лейбницем в письме к И. Бернулли).

Теорема 15.1 (признак Лейбница). Знакочередующийся ряд (15.1) сходится, если:

1. Последовательность абсолютных величин членов ряда монотонно убывает, т. е. $u_1 > u_2 > u_3 > \cdots > u_n > \ldots$;
2. Общий член ряда стремится к нулю: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

При этом сумма S ряда (15.1) удовлетворяет неравенствам

$$0 < S < u_1. \qquad (15.2)$$

❑ Рассмотрим сначала частичную сумму четного числа ($2m$) членов ряда (15.1). Имеем

$$S_{2m} = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + u_{2m-1} - u_{2m} = \\ = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \cdots + (u_{2m-1} - u_{2m}).$$

Выражение в каждой скобке, согласно первому условию теоремы, положительно. Следовательно, сумма $S_{2m} > 0$ и возрастает с возрастанием номера $2m$.

С другой стороны, S_{2m} можно переписать так:

$$S_{2m} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \cdots - (u_{2m-2} - u_{2m-1}) - u_{2m}.$$

Легко видеть, что $S_{2m} < u_1$. Таким образом, последовательность $S_2, S_4, S_6, \ldots, S_{2m}, \ldots$ возрастает и ограничена сверху. Следовательно, она имеет предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2m} = S$, причем $0 < S < u_1$.

Рассмотрим теперь частичные суммы нечетного числа ($2m+1$) членов ряда (15.1). Очевидно, что $S_{2m+1} = S_{2m} + u_{2m+1}$. Отсюда следует, что

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m+1} = \lim_{m\to\infty}(S_{2m} + u_{2m+1}) = \lim_{m\to\infty} S_{2m} + 0 = S,$$

т. к. $\lim\limits_{m\to\infty} u_{2m+1} = 0$ в силу второго условия теоремы. Итак, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ как при четном n, так и при нечетном n. Следовательно, ряд (15.1) сходится, причем $0 < S < u_1$. ■

Замечания.

1. Исследование знакочередующегося ряда вида

$$-u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - \dots \qquad (15.3)$$

(с отрицательным первым членом) сводится путем умножения всех его членов на (-1) к исследованию ряда (15.1).

Ряды (15.1) и (15.3), для которых выполняются условия теоремы Лейбница, называются ***лейбницевскими*** (или рядами Лейбница).

2. Соотношение (15.2) позволяет получить простую и удобную оценку ошибки, которую мы допускаем, заменяя сумму S данного ряда его частичной суммой S_n. Отброшенный ряд (остаток) представляет собой также знакочередующийся ряд $(-1)^{n+1}(u_{n+1} - u_{n+2} + \dots)$, сумма которого по модулю меньше первого члена этого ряда, т. е. $S_n < u_{n+1}$. Поэтому ошибка меньше модуля первого из отброшенных членов.



Пример 15.1. Вычислить приблизительно сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n^n}$.

Решение: Данный ряд лейбницевского типа. Он сходится. Можно записать: $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \dots = S$. Взяв пять членов, т. е. заменив S на

$$S_5 = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} = \frac{3}{4} + \frac{1}{27} - \frac{1}{256} + \frac{1}{3125} \approx 0{,}7834,$$

сделаем ошибку, меньшую, чем $\frac{1}{6^6} = \frac{1}{46656} < 0{,}00003$. Итак, $S \approx 0{,}7834$. ●

15.2. Общий достаточный признак сходимости знакопеременных рядов



Знакочередующийся ряд является частным случаем знакопеременного ряда. Числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, содержащий бесконечное множество положительных и бесконечное множество отрицательных членов, называется ***знакопеременным***.

Для знакопеременных рядов имеет место следующий *общий достаточный признак сходимости*.

Теорема 15.2. Пусть дан знакопеременный ряд

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \qquad (15.4)$$

Если сходится ряд

$$|u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots, \qquad (15.5)$$

составленный из модулей членов данного ряда, то сходится и сам знакопеременный ряд (15.4).

❑ Рассмотрим вспомогательный ряд, составленный из членов рядов (15.4) и (15.5):

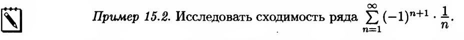
$$(u_1 + |u_1|) + (u_2 + |u_2|) + \cdots + (u_n + |u_n|) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(u_n + |u_n|).$$

Очевидно, что $0 \leqslant u_n + |u_n| \leqslant 2|u_n|$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Но ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2|u_n|$ сходится в силу условия теоремы и свойства 1 числовых рядов (п. 13.1). Следовательно, на основании признака сравнения (п. 13.3) сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n+|u_n|)$. Поскольку данный знакопеременный ряд (15.4) представляет собой разность двух сходящихся рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty}(u_n + |u_n|) - \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|,$$

то, на основании свойства 2 числовых рядов, он (ряд (15.4)) сходится. ■

Отметим, что обратное утверждение несправедливо: если сходится ряд (15.4), то это не означает, что будет сходиться ряд (15.5).



Пример 15.2. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$.

❍ Решение: Это знакочередующийся ряд, для которого выполнены условия признака Лейбница. Следовательно, указанный ряд сходится. Однако ряд, составленный из модулей членов данного ряда, т. е. ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

расходится (гармонический ряд). ●

15.3. Абсолютная и условная сходимости числовых рядов. Свойства абсолютно сходящихся рядов

Знакопеременный ряд называется ***абсолютно сходящимся***, если ряд, составленный из модулей его членов, сходится.

Знакопеременный ряд называется ***условно сходящимся***, если сам он сходится, а ряд, составленный из модулей его членов, расходится.

Так, ряд, показанный в примере (15.2), условно сходящийся. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n!}$$

абсолютно сходится, т. к. ряд, составленный из модулей его членов, сходится (см. пример 14.4).

Среди знакопеременных рядов абсолютно сходящиеся ряды занимают особое место: на такие ряды переносятся основные свойства конечных сумм (переместительность, сочетательность, распределительность).

Основные свойства абсолютно сходящихся рядов приводим без доказательства.



1. Если ряд абсолютно сходится и имеет сумму S, то ряд, полученный из него перестановкой членов, также сходится и имеет ту же сумму S, что и исходный ряд (теорема Дирихле).

2. Абсолютно сходящиеся ряды с суммами S_1 и S_2 можно почленно складывать (вычитать). В результате получается абсолютно сходящийся ряд, сумма которого равна $S_1 + S_2$ (или соответственно $S_1 - S_2$).

3. Под произведением двух рядов $u_1 + u_2 + \ldots$ и $v_1 + v_2 + \ldots$ понимают ряд вида

$$(u_1v_1) + (v_1v_2 + u_2v_1) + (u_1v_3 + u_2v_2 + u_3v_1) + \ldots$$
$$\cdots + (u_1v_n + u_2v_{n-1} + \cdots + u_nv_1) + \ldots$$

Произведение двух абсолютно сходящихся рядов с суммами S_1 и S_2 есть абсолютно сходящийся ряд, сумма которого равна $S_1 \cdot S_2$.

Таким образом, абсолютно сходящиеся ряды суммируются, вычитаются, перемножаются как обычные ряды. Суммы таких рядов не зависят от порядка записи членов.

В случае условно сходящихся рядов соответствующие утверждения (свойства), вообще говоря, не имеют места.

Так, переставляя члены условно сходящегося ряда, можно добиться того, что сумма ряда изменится. Например, ряд $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ условно сходится по признаку Лейбница. Пусть его сумма равна S. Перепишем его члены так, что после одного положительного члена будут идти два отрицательных. Получим ряд

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots =$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots =$$
$$= \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots\Big) = \frac{1}{2}S.$$

Сумма уменьшилась вдвое!

Более того, путем перестановки членов условно сходящегося ряда можно получить сходящийся ряд с заранее заданной суммой или расходящийся ряд (теорема Римана).

Поэтому действия над рядами нельзя производить, не убедившись в их абсолютной сходимости. Для установления абсолютной сходимости используют все признаки сходимости знакоположительных рядов, заменяя всюду общий член ряда его модулем.

Глава V. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Лекции 17–19

§ 16. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

16.1. Основные понятия

Ряд, членами которого являются функции от x, называется *функциональным:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x_1) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots \tag{16.1}$$

Придавая x определенное значение x_0, мы получим числовой ряд

$$u_1(x_0) + u_2(x_0) + \dots + u_n(x_0) + \dots,$$

который может быть как сходящимся, так и расходящимся.

Если полученный числовой ряд сходится, то точка x_0 называется ***точкой сходимости*** ряда (16.1); если же ряд расходится — ***точкой расходимости*** функционального ряда.

Совокупность числовых значений аргумента x, при которых функциональный ряд сходится, называется его *областью сходимости.*

В области сходимости функционального ряда его сумма является некоторой функцией от x: $S = S(x)$. Определяется она в области сходимости равенством

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x), \quad \text{где} \quad S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) \ —$$

частичная сумма ряда.

Пример 16.1. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$.

○ Решение: Данный ряд является рядом геометрической прогрессии со знаменателем $q = x$. Следовательно, этот ряд сходится при $|x| < 1$, т. е. при всех $x \in (-1; 1)$; сумма ряда равна $\frac{1}{1-x}$:

$$S(x) = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad \text{при} \quad |x| < 1.}$$ ●

Пример 16.2. Исследовать сходимость функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^2 x}{n^2}.$$

○ Решение: Составим ряд из абсолютных величин членов исходного ряда:

$$\left|\frac{\sin x}{1^2}\right| + \left|\frac{\sin 2^2 x}{2^2}\right| + \cdots + \left|\frac{\sin n^2 x}{n^2}\right| + \ldots \tag{16.2}$$

Так как при любом $x \in \mathbb{R}$ имеет место соотношение $\left|\frac{\sin n^2 x}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}$, а ряд с общим членом $\frac{1}{n^2}$ сходится (обобщенный гармонический ряд, $p = 2 > 1$, см. п. 14.4), то по признаку сравнения ряд (16.2) сходится при $x \in \mathbb{R}$. Следовательно, исходный ряд абсолютно сходится при всех $x \in \mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$. ●



Среди функциональных рядов в математике и ее приложениях особую роль играет ряд, членами которого являются степенные функции аргумента x, т. е. так называемый ***степенной ряд***:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \ldots \tag{16.3}$$



Действительные (или комплексные) числа $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называются ***коэффициентами ряда*** (16.3), $x \in \mathbb{R}$ — действительная переменная.

Ряд (16.3) расположен по степеням x. Рассматривают также степенной ряд, расположенный по степеням $(x - x_0)$, т. е. ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \ldots, \tag{16.4}$$

где x_0 — некоторое постоянное число.

Ряд (16.4) легко приводится к виду (16.3), если положить $x - x_0 = z$. Поэтому при изучении степенных рядов можем ограничиться степенными рядами вида (16.3).

§ 17. СХОДИМОСТЬ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

Выясним вопрос о сходимости степенного ряда (16.3).

Область сходимости степенного ряда (16.3) содержит по крайней мере одну точку: $x = 0$ (ряд (16.4) сходится в точке $x = x_0$).

17.1. Теорема Н. Абеля

Об области сходимости степенного ряда можно судить, исходя из следующей теоремы.

Теорема 17.1 (Абель). Если степенной ряд (16.3) сходится при $x = x_0 \neq 0$, то он абсолютно сходится при всех значениях x, удовлетворяющих неравенству $|x| < |x_0|$.

❑ По условию ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ сходится. Следовательно, по необходимому признаку сходимости $\lim\limits_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$. Отсюда следует, что величина $a_n x_0^n$ ограничена, т. е. найдется такое число $M > 0$, что для всех n выполняется неравенство $|a_n x_0^n| \leqslant M, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$

Пусть $|x| < |x_0|$, тогда величина $q = \left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$ и, следовательно,

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \cdot \left|\frac{x^n}{x_0^n}\right| \leqslant M \cdot q^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

т. е. модуль каждого члена ряда (16.3) не превосходит соответствующего члена сходящегося ($q < 1$) ряда геометрической прогрессии. Поэтому по признаку сравнения при $|x| < |x_0|$ ряд (16.3) абсолютно сходящийся. ■

Следствие 17.1. Если ряд (16.3) расходится при $x = x_1$, то он расходится и при всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| > |x_1|$.

❑ Действительно, если допустить сходимость ряда в точке x_2, для которой $|x_2| > |x_1|$, то по теореме Абеля ряд сходится при всех x, для которых $|x| < |x_2|$, и, в частности, в точке x_1, что противоречит условию. ■

17.2. Интервал и радиус сходимости степенного ряда

Из теоремы Абеля следует, что если $x_0 \neq 0$ есть точка сходимости степенного ряда, то интервал $(-|x_0|; |x_0|)$ весь состоит из точек сходимости данного ряда; при всех значениях x вне этого интервала ряд (16.3) расходится.

Рис. 48.

Интервал $(-|x_0|; |x_0|)$ и называют ***интервалом сходимости*** степенного ряда. Положив $|x_0| = R$, интервал сходимости можно записать в виде $(-R; R)$. Число R называют ***радиусом сходимости*** степенного ряда, т. е. $R > 0$ — это такое число, что при всех x, для которых $|x| < R$, ряд (16.3) абсолютно сходится, а при $|x| > R$ ряд расходится (см. рис. 48).

В частности, когда ряд (16.3) сходится лишь в одной точке $x_0 = 0$, то считаем, что $R = 0$. Если же ряд (16.3) сходится при всех значениях $x \in \mathbb{R}$ (т. е. во всех точках числовой оси), то считаем, что $R = \infty$.

Отметим, что на концах интервала сходимости (т. е. при $x = R$ и при $x = -R$) сходимость ряда проверяется в каждом случае отдельно.

Для нахождения радиуса сходимости степенного ряда (16.3) можно поступить следующим образом. Составим ряд из модулей членов данного степенного ряда

$$|a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \cdots + |a_n x^n| + \ldots$$

и применим к нему признак Даламбера. Допустим, что существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = |x|\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \neq 0, \quad x \neq 0.$$

По признаку Даламбера ряд сходится, если $|x|\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, т. е. ряд сходится при тех значениях x, для которых

$$|x| < \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|;$$

ряд, составленный из модулей членов ряда (16.3), расходится при тех значениях x, для которых $|x| > \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$. Таким образом, для ряда (16.3) радиус абсолютной сходимости

$$\boxed{R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.} \tag{17.1}$$

Аналогично, воспользовавшись радикальным признаком Коши, можно установить, что

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}. \tag{17.2}$$

Замечания.

1. Если $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0$, то можно убедиться, что ряд (16.3) абсолютно сходится на всей числовой оси. В этом случае $R = \infty$. Если $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$, то $R = 0$.

2. Интервал сходимости степенного ряда (16.4) находят из неравенства $|x - x_0| < R$; имеет вид $(x_0 - R; x_0 + R)$.

3. Если степенной ряд содержит не все степени x, т. е. задан неполный степенной ряд, то интервал сходимости ряда находят без определения радиуса сходимости (формулы (17.1) и (17.2)), а непосредственно применяя признак Даламбера (или Коши) для ряда, составленного из модулей членов данного ряда.

Пример 17.1. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$.

Решение: Воспользуемся формулой (17.1):

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1!)}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty.$$

Следовательно, данный ряд абсолютно сходится на всей числовой оси. ●

Пример 17.2. Найти область сходимости ряда

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^3}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots$$

Решение: Заданный ряд неполный. Воспользуемся признаком Даламбера. Для данного ряда имеем:

$$|u_n| = \frac{|x^{2n-1}|}{2n-1}, \quad |u_{n+1}| = \frac{|x^{2n+1}|}{2n+1},$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x^{2n+1}|\cdot(2n-1)}{(2n+1)\cdot|x^{2n-1}|} = |x^2|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1} = x^2.$$

Ряд абсолютно сходится, если $x^2 < 1$ или $-1 < x < 1$. Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости.

При $x = -1$ имеем ряд $-1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \ldots$, который сходится по признаку Лейбница.

При $x = 1$ имеем ряд $+1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$ — это тоже сходящийся лейбницевский ряд. Следовательно, областью сходимости исходного ряда является отрезок $[-1;1]$. ●

Пример 17.3. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n\cdot 2^{n-1}}.$$

Решение: Находим радиус сходимости ряда по формуле (17.1):

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n\cdot 2^{n-1}} : \frac{1}{(n+1)\cdot 2^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 2^n}{n\cdot 2^{n-1}} = 2.$$

Следовательно, ряд сходится при $-2 < x+2 < 2$, т. е. при $-4 < x < 0$.

При $x = -4$ имеем ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n\cdot 2^{n-1}} = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n},$$

который сходится по признаку Лейбница.

При $x = 0$ имеем расходящийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n\cdot 2^{n-1}} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Следовательно, областью сходимости исходного ряда является полуотрезок $[-4;0)$. ●

17.3. Свойства степенных рядов

Сформулируем без доказательства *основные свойства* степенных рядов.

1. Сумма $S(x)$ степенного ряда (16.3) является непрерывной функцией в интервале сходимости $(-R;R)$.

2. Степенные ряды $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, имеющие радиусы сходимости соответственно R_1 и R_2, можно почленно складывать, вычитать и умножать. Радиус сходимости произведения, суммы и разности рядов не меньше, чем меньшее из чисел R_1 и R_2.

3. Степенной ряд внутри интервала сходимости можно почленно дифференцировать; при этом для ряда

$$S(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n + \dots \tag{17.3}$$

при $-R < x < R$ выполняется равенство

$$S'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + n \cdot a_n x^{n-1} + \dots \tag{17.4}$$

4. Степенной ряд можно почленно интегрировать на каждом отрезке, расположенном внутри интервала сходимости; при этом для ряда (17.3) при $-R < a < x < R$ выполняется равенство (см. замечание 1, с. 89)

$$\int\limits_a^x S(t)\,dt = \int\limits_a^x a_0\,dt + \int\limits_a^x a_1 t\,dt + \int\limits_a^x a_2 t^2\,dt + \dots + \int\limits_a^x a_n t^n\,dt + \dots \tag{17.5}$$

Ряды (17.4) и (17.5) имеют тот же радиус сходимости, что и исходный степенной ряд.

Перечисленные свойства 1–4 остаются справедливыми и для степенных рядов вида (16.4).

Свойства степенных рядов широко используются в теоретических исследованиях и в приближенных вычислениях.

§ 18. РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ В СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

18.1. Ряды Тейлора и Маклорена

Для приложений важно уметь данную функцию $f(x)$ разлагать в степенной ряд, т. е. функцию $f(x)$ представлять в виде суммы степенного ряда.

Как известно (см. Часть 1, теорема 26.1), для любой функции $f(x)$, определенной в окрестности точки x_0 и имеющей в ней производные до $(n+1)$-го порядка включительно, справедлива формула Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$$
$$\dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x), \tag{18.1}$$



где $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$, $c \in (x_0, x)$, — остаточный член в форме Лагранжа. Число c можно записать в виде $c = x_0 + \theta(x - x_0)$, где $0 < \theta < 1$. Формулу (18.1) кратко можно записать в виде

$$\boxed{f(x) = P_n(x) + R_n(x),}$$

где $P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ — многочлен Тейлора.

Если функция $f(x)$ имеет производные любых порядков (т. е. бесконечно дифференцируема) в окрестности точки x_0 и остаточный член $R_n(x)$ стремится к нулю при $n \to \infty$ ($\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$), то из формулы Тейлора получается разложение функции $f(x)$ по степеням $(x - x_0)$, называемое *рядом Тейлора*:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \tag{18.2}$$

Если в ряде Тейлора положить $x_0 = 0$, то получим разложение функции по степеням x в так называемый *ряд Маклорена*:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n. \tag{18.3}$$

Отметим, что ряд Тейлора можно формально построить для любой бесконечно дифференцируемой функции (это необходимое условие) в окрестности точки x_0. Но отсюда еще не следует, что он будет сходиться к данной функции $f(x)$; он может оказаться расходящимся или сходиться, но не к функции $f(x)$. Так, например, функция

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}$$

имеет в точке $x = 0$ производные всех порядков, причем $f^{(n)}(0) = 0$ при всяком n (см. Часть 1, пример 19.5). Ряд Маклорена имеет вид

$$0 + \frac{0}{2!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \cdots + \frac{0}{n!}x^n + \ldots$$

Он сходится, но его сумма $S(x)$ в любой точке x равна нулю, а не $f(x)$.

Пусть для функции $f(x)$ составлен соответствующий ей ряд Тейлора.

Теорема 18.1. Для того чтобы ряд Тейлора (18.2) функции $f(x)$ сходился к $f(x)$ в точке x, необходимо и достаточно, чтобы в этой точке остаточный член формулы Тейлора (18.1) стремился к нулю при $n \to \infty$, т. е. чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

❑ Пусть ряд Тейлора (18.2) сходится к функции $f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0, т. е. $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$. Так как n-я частичная сумма $S_n(x)$ ряда (18.2) совпадает с многочленом Тейлора $P_n(x)$, т. е. $S_n(x) = P_n(x)$, находим:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty}(f(x) - P_n(x)) = \lim_{n\to\infty}(f(x) - S_n(x)) =$$
$$= f(x) - \lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

5*

Обратно, пусть $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} P_n(x) = \lim_{n\to\infty} (f(x) - R_n(x)) = \\ = f(x) - \lim_{n\to\infty} R_n(x) = f(x) - 0 = f(x). \quad \blacksquare$$

Замечание. Если ряд Тейлора (18.2) сходится к порождающей функции $f(x)$, то остаточный член формулы Тейлора равен остатку ряда Тейлора, т. е. $R_n(x) = r_n(x)$. (Напомним, что $R_n(x) = f(x) - S_n(x)$, а $r_n(x) = S(x) - S_n(x)$, где $S(x)$ — сумма ряда Тейлора.)



Таким образом, задача разложения функции $f(x)$ в степенной ряд сведена по существу к определению значений x, при которых $R_n(x) \to 0$ (при $n \to \infty$). Если сделать это не просто, то следует каким-нибудь иным способом убедиться, что написанный ряд Тейлора сходится к данной функции.

На практике часто пользуются следующей теоремой, которая дает простое достаточное условие разложимости функции в ряд Тейлора.

Теорема 18.2. Если модули всех производных функций $f(x)$ ограничены в окрестности точки x_0 одним и тем же числом $M > 0$, то для любого x из этой окрестности ряд Тейлора функции $f(x)$ сходится к функции $f(x)$, т. е. имеет место разложение (18.2).

☐ Согласно теореме 18.1, достаточно показать, что $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. По условию теоремы 18.2 для любого n имеет место неравенство $|f^{(n)}(x)| \leqslant M$. Тогда имеем:

$$\lim_{n\to\infty} |R_n(x)| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \right| \leqslant \\ \leqslant \lim_{n\to\infty} M \cdot \left| \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \right| = M \cdot \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \right|.$$

Осталось показать, что $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \right| = 0$. Для этого рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|(x-x_0)^{n+1}|}{(n+1)!}.$$

Так как

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x-x_0|^{n+2} \cdot (n+1)!}{(n+2)! \cdot |x-x_0|^{n+1}} = |x-x_0| \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+2} = 0 < 1,$$

то по признаку Даламбера этот ряд сходится на всей числовой оси. Но тогда, в силу необходимого признака сходимости,

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$$

Следовательно, $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. $\blacksquare$

18.2. Разложение некоторых элементарных функций в ряд Тейлора (Маклорена)

Для разложения функции $f(x)$ в ряд Маклорена (18.3) нужно:

а) найти производные $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n)}(x), \ldots$;

б) вычислить значения производных в точке $x_0 = 0$;

в) написать ряд (18.3) для заданной функции и найти его интервал сходимости;

г) найти интервал $(-R; R)$, в котором остаточный член ряда Маклорена $R_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$. Если такой интервал существует, то в нем функция $f(x)$ и сумма ряда Маклорена совпадают.

Замечание. В интервале сходимости степенного ряда остаточный член стремится к нулю при $n \to \infty$.

Приведем таблицу, содержащую разложения в ряд Маклорена некоторых элементарных функций (эти разложения следует запомнить):

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \qquad x \in (-\infty; \infty), \qquad (18.4)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, \qquad x \in (-\infty; \infty), \qquad (18.5)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \qquad x \in (-\infty; \infty), \qquad (18.6)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots,$$

$$x \in \begin{cases} [-1; 1], & \text{если } \alpha \geqslant 0, \\ (-1; 1], & \text{если } -1 < \alpha < 0, \\ (-1; 1), & \text{если } \alpha \leqslant -1, \end{cases} \qquad (18.7)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \ldots, \qquad x \in (-1; 1), \qquad (18.8)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots, \qquad x \in (-1; 1], \qquad (18.9)$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \ldots, \qquad x \in [-1; 1], \qquad (18.10)$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \ldots \qquad (18.11)$$

$$\cdots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n)} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots, \qquad x \in [-1; 1], \qquad (18.12)$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, \qquad x \in (-\infty; \infty), \qquad (18.13)$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \qquad x \in (-\infty; \infty). \qquad (18.14)$$

Докажем формулу (18.4). Пусть $f(x) = e^x$.

❑ Имеем:

а) $f'(x) = e^x$, $f''(x) = e^x$, ..., $f^{(n)}(x) = e^x$, ...;

б) $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$, ..., $f^{(n)}(0) = 1$, ...;

в) $e^x \sim 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$; $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!}{n!}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}(n+1) = \infty$, т. е. ряд сходится в интервале $(-\infty; \infty)$;

г) для всех $x \in (-R; R)$ имеем $|f^{(n)}(x)| = e^x < e^R = M$, т. е. все производные в этом интервале ограничены одним и тем же числом $M = e^R$. Следовательно, по теореме 18.2 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. Таким образом, $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots$ ■

Докажем формулу (18.5). Пусть $f(x) = \sin x$.

❑ Имеем:

а) $f'(x) = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$, $f''(x) = -\sin x = \sin(x + 2\cdot\frac{\pi}{2})$, $f'''(x) = -\cos x = \sin(x + 3\cdot\frac{\pi}{2})$, ..., $f^{(n)}(x) = \sin(x + n\cdot\frac{\pi}{2})$ ...;

б) $f^{(n)}(0) = \sin\frac{\pi n}{2} = \begin{cases} 0, & n = 0, 2, 4, 6, \ldots, \\ -1, & n = 3, 7, 11, \ldots, \\ +1, & n = 1, 5, 9, \ldots; \end{cases}$

в) $\sin x \sim x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$ Легко проверить, что полученный ряд сходится на всей числовой оси, т. е. при всех $x \in (-\infty; \infty)$;

г) любая производная функции $f(x) = \sin x$ по модулю не превосходит единицы, $|f^{(n)}(x)| = \left|\sin\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right| \leqslant 1$. Следовательно, по теореме 18.2 имеет место разложение (18.5). ■

Докажем формулу (18.6). Пусть $f(x) = \cos x$.

❑ Формулу (18.6) можно доказать так же, как и формулу (18.5). Однако проще получить разложение функции $\cos x$, воспользовавшись свойством 3 степенных рядов. Продифференцировав почленно ряд (18.5), получим:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots, \quad x \in (-\infty; \infty).$$ ■

Докажем формулы (18.13), (18.14). Пусть $f(x) = \operatorname{ch} x$ (или $f(x) = \operatorname{sh} x$).

❑ Заменив в формуле (18.4) x на $-x$, получим разложение функции e^{-x}:

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \cdot \frac{x^n}{n!} + \ldots, \tag{18.15}$$

справедливое для всех $x \in (-\infty; \infty)$.

Суммируя (и вычитая) почленно равенства (18.4) и (18.15), получим разложение гиперболического косинуса (синуса):

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots, \quad x \in (-\infty; \infty),$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots, \quad x \in (-\infty; \infty).$$

Формулы (18.13) и (18.14) доказаны. ■

Докажем формулу (18.7). Пусть $f(x) = (1+x)^\alpha$, где $\alpha \in \mathbb{R}$.

❑ Имеем:

а) $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$, $f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$, $\ldots$, $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))(1+x)^{\alpha-n}$, $\ldots$, $n \in \mathbb{N}$;

б) $f(0) = 1$, $f'(0) = \alpha$, $f''(0) = \alpha(\alpha-1)$, $\ldots$, $f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)$, $\ldots$;

в) $(1+x)^\alpha \sim 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots$;

г) $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-(n-1))\cdot(n+1)!}{n!\cdot\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-(n-1))(\alpha-n)}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{\alpha-n}\right| = 1$, т. е. составленный для функции $(1+x)^\alpha$ ряд сходится в интервале $(-1;1)$.

Можно показать, что и в данном случае, т. е. при $x \in (-1;1)$, остаточный член $R_n(x)$ стремится к нулю при $n \to \infty$. ■

Ряд (18.7) называется *биномиальным*. Если $\alpha = n \in \mathbb{N}$, то все члены ряда с $(n+1)$-го номера равны 0, так как содержат множитель $\alpha - n = n - n = 0$. В этом случае ряд (18.7) представляет собой известную формулу бинома Ньютона:

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{n(n-1)\ldots 1}{n!}x^n.$$

Докажем формулу (18.8). Пусть $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

❑ Формула (18.8) может быть получена разными способами:

1) пользуясь правилом разложения функции в ряд;

2) рассматривая ряд $1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\ldots$ как ряд геометрической прогрессии, первый член которой равен единице и знаменатель $q = x$; известно (см. пример 16.1), что данный ряд сходится при $x \in (-1;1)$ и его сумма равна $\frac{1}{1-x}$;

3) воспользовавшись формулой (18.7): положив в ней $\alpha = -1$ и заменив x на $-x$, получим формулу (18.8). ■

Докажем формулу (18.9). Пусть $f(x) = \ln(1+x)$.

Формула (18.9) также может быть доказана разными способами. Приведем один из них.

❑ Рассмотрим равенство

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots,$$

справедливое для всех $x \in (-1; 1)$. Используя свойство 4 степенных рядов, проинтегрируем данный ряд на отрезке $[0; x]$, $x \in (-1; 1)$:

$$\int\limits_0^x \frac{dt}{1+t} = \int\limits_0^x dt - \int\limits_0^x t\,dt + \int\limits_0^x t^2\,dt - \int\limits_0^x t^3\,dt + \dots + (-1)^n \int\limits_0^x t^n\,dt + \dots,$$

или

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots$$

Можно показать, что это равенство справедливо и для $x = 1$. ■

Докажем формулу (18.10). Пусть $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

❑ Положив в формуле (18.7) $\alpha = -1$ и заменив x на x^2, получим равенство

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^n \cdot x^{2n} + \dots, \quad x \in (-1; 1).$$

Тогда

$$\int\limits_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \int\limits_0^x 1\,dt - \int\limits_0^x t^2\,dt + \int\limits_0^x t^4\,dt - \dots + \int\limits_0^x (-1)^n t^{2n}\,dt + \dots,$$

или

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

Можно показать, что равенство справедливо и при $x = \pm 1$, т. е. при всех $x \in [-1; 1]$. ■

Докажем формулу (18.12). Пусть $f(x) = \arcsin x$.

❑ Положив в формуле (18.7) $\alpha = -\frac{1}{2}$ и заменив x на $(-x^2)$, получим равенство

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \dots, \quad x \in [-1; 1].$$

Тогда

$$\int\limits_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int\limits_0^x dt + \int\limits_0^x \frac{t^2}{2}\,dt + \int\limits_0^x \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}t^4\,dt + \dots,$$

или

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \dots$$

Можно показать, что полученное равенство справедливо при всех $x \in [-1; 1]$. ■

Ряды (18.4)–(18.14) в комбинации с правилами сложения, вычитания, умножения, дифференцирования, интегрирования степенных рядов (см. свойства степенных рядов) могут быть использованы при разложении (некоторых) других функций в ряд Маклорена (Тейлора).

Пример 18.1. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = 3^x$.

Решение: Так как $3^x = e^{\ln 3^x} = e^{x \ln 3}$, то, заменяя x на $x \ln 3$ в разложении (18.4), получим:

$$3^x = 1 + \frac{\ln 3}{1!}x + \frac{\ln^2 3}{2!}x^2 + \frac{\ln^3 3}{3!}x^3 + \dots + \frac{\ln^n 3}{n!}x^n + \dots, \quad x \in (-\infty; \infty).$$

Пример 18.2. Выписать ряд Маклорена функции $f(x) = \ln(4 - x)$,

Решение: Так как

$$f(x) = \ln(4 - x) = \ln 4\left(1 - \frac{x}{4}\right) = \ln 4 + \ln\left[1 + \left(-\frac{x}{4}\right)\right],$$

то, воспользовавшись формулой (18.9), в которой заменим x на $(-\frac{x}{4})$, получим:

$$\ln(4 - x) = \ln 4 + (-\frac{x}{4}) - \frac{(-\frac{x}{4})^2}{2} + \frac{(-\frac{x}{4})^3}{3} - \dots,$$

или

$$\ln(4 - x) = \ln 4 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4^2} \cdot \frac{x^2}{2} - \dots - \frac{1}{4^{n+1}} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} - \dots,$$

если $-1 < -\frac{x}{4} \leqslant 1$, т. е. $-4 \leqslant x < 4$.

Пример 18.3. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \frac{2}{3 - x}$.

Решение: Воспользуемся формулой (18.8). Так как

$$f(x) = \frac{2}{3 - x} = \frac{2}{3 \cdot (1 - \frac{x}{3})} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{3}},$$

то, заменив x на $\frac{x}{3}$ в формуле (18.8), получим:

$$\frac{2}{3 - x} = \frac{2}{3} \cdot \left(1 + \frac{x}{3} + \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{x}{3}\right)^3 + \dots\right),$$

или

$$\frac{2}{3 - x} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{x}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{x^2}{3^2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{x^2}{3^2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{x^3}{3^3} + \dots + \frac{2}{3} \cdot \frac{x^n}{3^n} + \dots,$$

где $-1 < \frac{x}{3} < 1$, т. е. $-3 < x < 3$.

§ 19. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

19.1. Приближенное вычисление значений функции

Пусть требуется вычислить значение функции $f(x)$ при $x = x_1$ с заданной точностью $\varepsilon > 0$.

Если функцию $f(x)$ в интервале $(-R; R)$ можно разложить в степенной ряд

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

и $x_1 \in (-R; R)$, то точное значение $f(x_1)$ равно сумме этого ряда при $x = x_1$, т.е.

$$f(x_1) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_nx_1^n + \dots,$$

а приближенное — частичной сумме $S_n(x_1)$, т.е.

$$f(x_1) \approx S_n(x_1) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_nx_1^n.$$

Точность этого равенства увеличивается с ростом n. Абсолютная погрешность этого приближенного равенства равна модулю остатка ряда, т.е.

$$|f(x_1) - S_n(x_1)| = |r_n(x_1)|,$$

где

$$r_n(x_1) = a_{n+1}x_1^{n+1} + a_{n+2}x_1^{n+2} + \dots$$

Таким образом, ошибку $|f(x_1) - S_n(x_1)|$ можно найти, оценив остаток $r_n(x_1)$ ряда.

Для рядов лейбницевского типа

$$|r_n(x_1)| = |u_{n+1}(x_1) + u_{n+2}(x_1) + u_{n+3}(x_1) + \dots| < |u_{n+1}(x_1)|$$

(см. п. 15.1).

В остальных случаях (ряд знакопеременный или знакоположительный) составляют ряд из модулей членов ряда и для него стараются найти (подобрать) положительный ряд с большими членами (обычно это сходящийся ряд геометрической прогрессии), который легко бы суммировался. И в качестве оценки $|r_n(x_1)|$ берут величину остатка этого нового ряда.

Пример 19.1. Найти $\sin 1$ с точностью до 0,001.

Решение: Согласно формуле (18.5),

$$\sin 1 = 1 - \frac{1}{3!}1^3 + \frac{1}{5!}1^5 - \dots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)!}.$$

Стоящий справа ряд сходится абсолютно (проверить самостоятельно). Так как $\frac{1}{5!} \approx 0{,}008(3) > 0{,}001$, а $\frac{1}{7!} \approx 0{,}0002 < 0{,}001$, то для нахождения $\sin 1$ с точностью до 0,001 достаточно первых трех слагаемых:

$$\sin 1 \approx 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} = 0{,}842.$$

Допускаемая при этом ошибка меньше, чем первый отброшенный член (т.е. меньше, чем 0,0002). Вычисленное микрокалькулятором значение $\sin 1$ примерно равно 0,84147. ●

Пример 19.2. Вычислить число e с точностью до 0,001.

Решение: Подставляя $x = 1$ в формулу (18.4), получим:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

Справа стоит знакоположительный ряд. Возьмем n слагаемых и оценим ошибку $r_n(x)$:

$$r_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \dots =$$
$$= \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots\right) <$$
$$< \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots\right) = \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}}\right) = \frac{1}{n!\cdot n},$$

т. е. $r_n(x) < \frac{1}{n!\cdot n}$. Остается подобрать наименьшее натуральное число n, чтобы выполнялось неравенство $\frac{1}{n!\cdot n} < 0{,}001$.

Нетрудно вычислить, что это неравенство выполняется при $n \geqslant 6$. Поэтому имеем:

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} = 2\frac{517}{720} \approx 2{,}718.$$ ●

Замечание. Оценку остатка ряда можно производить с помощью остаточного члена ряда Маклорена

$$|f(x_1) - S_n(x_1)| = |R_n(x_1)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\right|,$$

где c находится между 0 и x_1. В последнем примере $R_n(1) = \frac{e^c}{(n+1)!}$, $0 < c < 1$. Так как $e^c < e^1 < 3$, то $R_n(1) < \frac{3}{(n+1)!}$. При $n = 6$ имеем: $R_6(1) < \frac{3}{7!} < 0{,}001$, $e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{6!} \approx 2{,}718$.

19.2. Приближенное вычисление определенных интегралов

Бесконечные ряды применяются также для приближенного вычисления неопределенных и определенных интегралов в случаях, когда первообразная не выражается в конечном виде через элементарные функции (см. Часть 1, § 34) либо нахождение первообразной сложно.

Пусть требуется вычислить $\int_a^b f(x)\,dx$ с точностью до $\varepsilon > 0$. Если подынтегральную функцию $f(x)$ можно разложить в ряд по степеням x и интервал сходимости $(-R; R)$ включит в себя отрезок $[a; b]$, то для вычисления заданного интеграла можно воспользоваться свойством почленного интегрирования этого ряда. Ошибку вычислений определяют так же, как и при вычислении значений функций.



Пример 19.3. Вычислить интеграл $\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2}\,dx$ с точностью до $\varepsilon = 0{,}001$.

○ Решение: Разложим подынтегральную функцию в ряд Маклорена, заменяя x на $(-x^2)$ в формуле (18.4):

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots, \quad x \in (-\infty; \infty). \qquad (19.1)$$

Интегрируя обе части равенства (19.1) на отрезке $\left[0; \frac{1}{4}\right]$, лежащем внутри интервала сходимости $(-\infty; \infty)$, получим:

$$\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2}dx = \int_0^{\frac{1}{4}} \left(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots\right)dx =$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{1!\cdot 3} + \frac{x^5}{2!\cdot 5} - \frac{x^7}{3!\cdot 7} + \ldots\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} - \frac{1}{1!\cdot 3\cdot 4^3} + \frac{1}{2!\cdot 5\cdot 4^5} - \frac{1}{3!\cdot 7\cdot 4^7} + \ldots$$

Получили ряд лейбницевского типа. Так как $\frac{1}{1!\cdot 3\cdot 4^3} = 0{,}0052\ldots > 0{,}001$, а $\frac{1}{2!\cdot 5\cdot 4^5} < 0{,}001$, то с точностью до 0,001 имеем:

$$\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2}dx \approx \frac{1}{4} - \frac{1}{192} = 0{,}245. \qquad \bullet$$

Замечание. Первообразную $F(x)$ для функции $f(x) = e^{-x^2}$ легко найти в виде степенного ряда, проинтегрировав равенство (19.1) в пределах от 0 до x:

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2}dt = \int_0^x \left(1 - \frac{t^2}{1!} + \frac{t^4}{2!} - \ldots\right)dt =$$

$$= x - \frac{x^3}{1!\cdot 3} + \frac{x^5}{2!\cdot 5} - \frac{x^7}{3!\cdot 7} + \ldots, \quad x \in (-\infty; \infty).$$

Функции $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ и $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ играют очень важную роль в теории вероятностей. Первая — *плотность стандартного распределения вероятностей*, вторая — *функция Лапласа* $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ (или *интеграл вероятностей*). Мы получили, что функция Лапласа представляется рядом

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(x - \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{x^5}{2^2 2!\cdot 5} - \frac{x^7}{2^3\cdot 3!\cdot 7} + \ldots\right),$$

который сходится на всей числовой оси.

19.3. Приближенное решение дифференциальных уравнений

Если решение дифференциального уравнения не выражается через элементарные функции в конечном виде или способ его решения слишком

сложен, то для приближенного решения уравнения можно воспользоваться рядом Тейлора.

Познакомимся с двумя способами решения дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов.

Пусть, например, требуется решить уравнение

$$y'' = f(x; y; y'), \tag{19.2}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y|_{x=x_0} = y_0, \quad y'|_{x=x_0} = y_0'. \tag{19.3}$$

Способ последовательного дифференцирования

Решение $y = y(x)$ уравнения (19.2) ищем в виде ряда Тейлора:

$$y = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots, \tag{19.4}$$

при этом первые два коэффициента находим из начальных условий (19.3). Подставив в уравнение (19.2) значения $x = x_0$, $y = y_0$, $y' = y_0'$, находим третий коэффициент: $y''(x_0) = f(x_0; y_0; y_0')$. Значения $y'''(x_0), y^{(4)}(x_0), \ldots$ находим путем последовательного дифференцирования уравнения (19.2) по x и вычисления производных при $x = x_0$. Найденные значения производных (коэффициентов) подставляем в равенство (19.4). Ряд (19.4) представляет искомое частное решение уравнения (19.2) для тех значений x, при которых он сходится. Частичная сумма этого ряда будет приближенным решением дифференциального уравнения (19.2).

Рассмотренный способ применим и для построения общего решения уравнения (19.2), если y_0 и y_0' рассматривать как произвольные постоянные.

Способ последовательного дифференцирования применим для решения дифференциальных уравнений любого порядка.



Пример 19.4. Методом последовательного дифференцирования найти пять первых членов (отличных от нуля) разложения в ряд решения уравнения $y'' = x^2 + y^2$, $y(-1) = 2$, $y'(-1) = \frac{1}{2}$.

Решение: Будем искать решение уравнения в виде

$$y = y(-1) + \frac{y'(-1)}{1!}(x + 1) + \frac{y''(-1)}{2!}(x + 1)^2 + \frac{y'''(-1)}{3!}(x + 1)^3 + \ldots$$

Здесь $y(-1) = 2, y'(-1) = \frac{1}{2}$. Находим $y''(-1)$, подставив $x = -1$ в исходное уравнение: $y''(-1) = (-1)^2 + 2^2 = 5$. Для нахождения последующих коэффициентов дифференцируем заданное дифференциальное уравнение:

$$y''' = 2x + 2yy',$$

$$y^{(4)} = 2 + 2(y')^2 + 2yy'',$$

$$y^{(5)} = 4y'y'' + 2y'y'' + 2yy''' = 6y'y'' + 2yy''', \ldots$$

При $x = -1$ имеем:

$$y'''(-1) = -2 + 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 0,$$

$$y^{(4)}(-1) = 2 + 2 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot 2 \cdot 5 = 22{,}5,$$

$$y^{(5)}(-1) = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 + 2 \cdot 2 \cdot 0 = 15, \ldots$$

Подставляя найденные значения производных в искомый ряд, получим:

$$y = 2 + \frac{1}{2}(x+1) + \frac{5}{2}(x+1)^2 + \frac{15}{16}(x+1)^4 + \frac{1}{8}(x+1)^5 + \ldots$$ ●

Способ неопределенных коэффициентов

Этот способ приближенного решения наиболее удобен для интегрирования линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

Пусть, например, требуется решить уравнение

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x) \tag{19.5}$$

с начальными условиями $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$.

Предполагая, что коэффициенты $p_1(x)$, $p_2(x)$ и свободный член $f(x)$ разлагаются в ряды по степеням $x - x_0$, сходящиеся в некотором интервале $(x_0 - R; x_0 + R)$, искомое решение $y = y(x)$ ищем в виде степенного ряда

$$y = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \cdots + c_n(x - x_0)^n + \ldots \tag{19.6}$$

с неопределенными коэффициентами.

Коэффициенты c_0 и c_1 определяются при помощи начальных условий $c_0 = y_0$, $c_1 = y_0'$.

Для нахождения последующих коэффициентов дифференцируем ряд (19.6) два раза (каков порядок уравнения) и подставляем выражения для функции y и ее производных в уравнение (19.5), заменив в нем $p_1(x)$, $p_2(x)$, $f(x)$ их разложениями. В результате получаем тождество, из которого методом неопределенных коэффициентов находим недостающие коэффициенты. Построенный ряд (19.6) сходится в том же интервале $(x_0 - R; x_0 + R)$ и служит решением уравнения (19.5).



Пример 19.5. Найти решение уравнения

$$y'' + xy' + y = x \cos x, \quad y(0) = 0, \ y'(0) = 1,$$

используя метод неопределенных коэффициентов.

❍ Решение: Разложим коэффициенты уравнения в степенные ряды: $p_1(x) = x$, $p_2 = 1$,

$$f(x) = x \cos x = x\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots\right).$$

Ищем решение уравнения в виде ряда

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots$$

Тогда

$$y' = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + \ldots,$$
$$y'' = 2c_2 + 2\cdot 3\cdot c_3x + 3\cdot 4\cdot c_4x^2 + \ldots$$

Из начальных условий находим: $c_0 = 0$, $c_1 = 1$. Подставляем полученные ряды в дифференциальное уравнение:

$$(2c_2 + 2\cdot 3\cdot c_3x + 3\cdot 4\cdot c_4x^2 + \ldots)+$$
$$+ x(c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + \ldots) + (c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \ldots) =$$
$$= x\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\right).$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$x^0: \quad 2c_2 = 0,$$
$$x^1: \quad 2\cdot 3\cdot c_3 + 2 = 1,$$
$$x^2: \quad 3\cdot 4\cdot c_4 + 2c_2 + c_2 = 0,$$
$$x^3: \quad 4\cdot 5\cdot c_5 + 3c_3 + c_3 = -\frac{1}{2},$$
$$x^4: \quad 5\cdot 6\cdot c_6 + 4c_4 + c_4 = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Отсюда находим, что $c_2=c_4=c_6=\cdots=0$, $c_3=-\frac{1}{3!}$, $c_5=\frac{1}{5!}$, $c_7=-\frac{1}{7!}$, ... Таким образом, получаем решение уравнения в виде

$$y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots,$$

т. е. $y = \sin x$. ●

Глава VI. РЯДЫ ФУРЬЕ. ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

Лекции 20–22

§ 20. РЯДЫ ФУРЬЕ

20.1. Периодические функции. Периодические процессы

При изучении разнообразных *периодических процессов*, т. е. процессов, которые через определенный промежуток времени повторяются (встречаются в радиотехнике, электронике, теории упругости, теории и практике автоматического регулирования и т. д.), целесообразнее разлагать периодические функции, описывающие эти процессы, не в степенной ряд, а в так называемый тригонометрический ряд.

Напомним, что функция $y = f(x)$, определенная на множестве D, называется *периодической* (см. Часть 1, п. 14.3) *с периодом* $T > 0$, если при каждом $x \in D$ значение $(x+T) \in D$ и выполняется равенство $f(x+T) = f(x)$.

Для построения графика периодической функции периода T достаточно построить его на любом отрезке длины T и периодически продолжить его во всю область определения.

Отметим основные свойства периодической функции.

1. Алгебраическая сумма периодических функций, имеющих один и тот же период T, есть периодическая функция с периодом T.

2. Если функция $f(x)$ имеет период T, то функция $f(ax)$ имеет период $\frac{T}{a}$: действительно, $f\left(a \cdot \left(x + \frac{T}{a}\right)\right) = f(ax + T) = f(ax)$.

3. Если функция $f(x)$ имеет период T и интегрируема на отрезке $[x_0; x_1] \in \mathbb{R}$, то $\int\limits_a^{a+T} f(x)\,dx = \int\limits_b^{b+T} f(x)\,dx$ при любых a и $b \in [x_0; x_1]$.

❑ Пусть, например, $0 < a < b < T$, тогда

$$\int\limits_a^{a+T} f(x)\,dx = \int\limits_a^{b} f(x)\,dx + \int\limits_b^{a+T} f(x)\,dx. \tag{20.1}$$

С другой стороны,

$$\int\limits_b^{b+T} f(x)\,dx = \int\limits_b^{a+T} f(x)\,dx + \int\limits_{a+T}^{b+T} f(x)\,dx. \tag{20.2}$$

Но $\int\limits_{a+T}^{b+T} f(x)\,dx =$ (подстановка $x = u + T$) $= \int\limits_a^b f(u+T)\,du = \int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Подставляем полученный результат в (20.2) и, сравнивая с (20.1), имеем $\int\limits_a^{a+T} f(x)\,dx = \int\limits_b^{b+T} f(x)\,dx$. ■

В частности, $\int\limits_0^T f(x)\,dx = \int\limits_b^{b+T} f(x)\,dx.$

Простейшими периодическими функциями являются тригонометрические функции $\sin x$ и $\cos x$. Период этих функций равен 2π, т. е. $T = 2\pi$.

Простейшим периодическим процессом (движением) является *простое гармоническое колебание* (движение), описываемое функцией

$$y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0), \tag{20.3}$$

$t \geqslant 0$, где A — *амплитуда колебания*, ω — *частота*, φ_0 — *начальная фаза*.

Функцию такого вида (и ее график) называют *простой гармоникой*. Основным периодом функции (20.3) является $T = \frac{2\pi}{\omega}$, т. е. одно полное колебание совершается за промежуток времени $\frac{2\pi}{\omega}$ (ω показывает, сколько колебаний совершает точка в течение 2π единиц времени).

Проведем преобразование функции (20.3):

$$y = A\sin(\omega t + \varphi_0) = A\sin\omega t\cos\varphi_0 + A\cos\omega t\sin\varphi_0 = a\cos\omega t + b\sin\omega t, \tag{20.4}$$

где $a = A\sin\varphi_0$, $b = A\cos\varphi_0$. Отсюда видно, что простое гармоническое колебание описывается периодическими функциями $\sin\omega t$ и $\cos\omega t$.

Сложное гармоническое колебание, возникающее в результате наложения конечного (или бесконечного) числа простых гармоник, также описывается функциями вида $\sin\omega t$ и $\cos\omega t$. Так, функция

$$\varphi(t) = A_0 + A_1\sin(t + \varphi_1) + A_2\sin(2t + \varphi_2) + \cdots + A_{30}\sin(30t + \varphi_{30}) = \\ = A_0 + \sum_{n=1}^{30} A_n\sin(nt + \varphi_n)$$

или, что равносильно, функция $\varphi(t) = A_0 + \sum\limits_{n=1}^{30}(a_n\cos nt + b_n\sin nt)$ задает сложное гармоническое колебание. Так как период первой гармоники есть $T_1 = 2\pi$, второй $T_2 = \frac{2\pi}{2}$, третьей $T_3 = \frac{2\pi}{3}$, ..., тридцатой $T_{30} = \frac{2\pi}{30}$, а период функции $y = A_0$ («нулевая гармоника») есть любое число, то функция $\varphi(t)$ имеет период, равный 2π, т. е. $T = 2\pi$.

Понятно, что при наложении простых гармоник получаем периодическую функцию, описывающую сложное периодическое колебание (периодический процесс).

Возникает вопрос: всякую ли периодическую функцию, описывающую периодический процесс, можно представить в виде суммы простых гармоник вида (20.3) или (20.4)? Если да, то как найти неизвестные параметры (коэффициенты) каждой из этих гармоник? Ответим сначала на второй вопрос, а потом и на первый.

20.2. Тригонометрический ряд Фурье

С помощью так называемого тригонометрического ряда любую (практически) периодическую функцию можно представить в виде ряда, членами которого являются простые гармоники.

Тригонометрическим рядом называется функциональный ряд вида

$$\frac{a_0}{2} + a_1\cos x + b_1\sin x + \dots + a_n\cos nx + b_n\sin nx + \dots =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx + b_n\sin nx, \quad (20.5)$$

где действительные числа a_0, a_n, b_n ($n = 1, 2, \dots$) называются *коэффициентами* ряда.

Ряд (20.5) можно записать в виде

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\sin(nx + \varphi_n). \quad (20.6)$$

Действительно, положив $a_n = A_n\sin\varphi_n$, $b_n = A_n\cos\varphi_n$, получим: $a_n\cos nx + b_n\sin nx = A_n\sin(nx + \varphi_n)$; ряд (20.5) принимает вид (20.6), при этом $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ и $\operatorname{tg}\varphi_n = \frac{a_n}{b_n}$.

Свободный член ряда записан в виде $\frac{a_0}{2}$ для единообразия получающихся в дальнейшем формул.

Приведем формулы, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Считая m и n целыми положительными, находим:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx = \begin{cases} \left.\frac{\sin nx}{n}\right|_{-\pi}^{\pi} = 0 & (n \neq 0) \\ \left.x\right|_{-\pi}^{\pi} = 2\pi & (n = 0), \end{cases} \quad (20.7)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx = 0 \quad \text{при любом } n, \quad (20.8)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cdot\cos nx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\big(\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\big)\,dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n), \\ \pi & (m = n), \end{cases} \quad (20.9)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cdot\cos nx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\big(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\big)\,dx = 0, \quad (20.10)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cdot\sin nx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\big(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\big)\,dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n), \\ \pi & (m = n). \end{cases} \quad (20.11)$$

Замечания.

1. Формулы (20.7)–(20.11) показывают, что семейство функций

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cos 3x, \sin 3x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$$

обладает ***свойством ортогональности***: интеграл от произведения любых двух функций этого семейства на интервале, имеющем длину 2π, равен нулю.

2. Формулы (20.7)–(20.11) справедливы и в случае, когда область интегрирования есть отрезок $[0; 2\pi]$ (см. свойство 3 периодических функций, п. 20.1).

Пусть $f(x)$ — произвольная периодическая функция с периодом 2π. Предположим, что функция $f(x)$ разлагается в тригонометрический ряд, т. е. $f(x)$ является суммой ряда (20.5):

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx. \tag{20.12}$$

Так как функция $f(x)$ (и сумма ряда) имеет период 2π, то ее можно рассматривать в любом промежутке длины 2π. В качестве основного промежутка возьмем отрезок $[-\pi;\pi]$ (также удобно взять отрезок $[0;2\pi]$) и предположим, что ряд (20.12) на этом отрезке можно почленно интегрировать. Вычислим коэффициенты a_n и b_n. Для этого проинтегрируем обе части равенства (20.12) в пределах от $-\pi$ до π:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,dx\right) =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\,dx = \pi a_0.$$

Интегралы от всех, кроме нулевого, членов ряда равны нулю в силу формул (20.7) и (20.8).

Отсюда

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx.} \tag{20.13}$$

Умножив обе части равенства (20.12) на $\cos mx$ и проинтегрировав полученный ряд в пределах от $-\pi$ до π, получим:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\,dx +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx\,dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx\,dx\right).$$

В силу формул (20.7), (20.9) и (20.10) из последнего равенства при $m = n$ получаем:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = a_n\pi.$$

Отсюда

$$\boxed{a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots} \tag{20.14}$$

Аналогично, умножив равенство (20.12) на $\sin mx$ и проинтегрировав почленно на отрезке $[-\pi;\pi]$, найдем:

$$\boxed{b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots} \tag{20.15}$$



Числа a_0, a_n, b_n, определяемые по формулам (20.13)–(20.15), называются ***коэффициентами Фурье*** функции $f(x)$, а тригонометрический ряд (20.5) с такими коэффициентами — ***рядом Фурье*** функции $f(x)$.

Для интегрируемой на отрезке $[-\pi;\pi]$ функции $f(x)$ записывают

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

и говорят: функции $f(x)$ соответствует (поставлен в соответствие) ее ряд Фурье. Если ряд Фурье сходится, то его сумму обозначим $S(x)$.

§ 21. РАЗЛОЖЕНИЕ В РЯД ФУРЬЕ 2π-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

21.1. Теорема Дирихле

Выясним условия, при которых знак соответствия ($\sim$) можно заменить знаком равенства ($=$), т. е. условия, при которых ряд Фурье функции $f(x)$ сходится и имеет своей суммой как раз функцию $f(x)$.

Будем рассматривать функции $f(x)$, имеющие период $T = 2\pi$. Такие функции называют *2π-периодическими*.

Сформулируем теорему, представляющую достаточное условие разложимости функции в ряд Фурье.

Теорема 21.1 (Дирихле). Пусть 2π-периодическая функция $f(x)$ на отрезке $[-\pi;\pi]$ удовлетворяет двум условиям:

1. $f(x)$ кусочно-непрерывна, т. е. непрерывна или имеет конечное число точек разрыва I рода;

2. $f(x)$ кусочно-монотонна, т. е. монотонна на всем отрезке, либо этот отрезок можно разбить на конечное число интервалов так, что на каждом из них функция монотонна.

Тогда соответствующий функции $f(x)$ ряд Фурье сходится на этом отрезке и при этом:

1. В точках непрерывности функции сумма ряда $S(x)$ совпадает с самой функцией: $S(x) = f(x)$;

2. В каждой точке x_0 разрыва функции сумма ряда равна

$$S(x_0) = \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2},$$

т. е. равна среднему арифметическому пределов функции $f(x)$ справа и слева;

3. В точках $x = -\pi$ и $x = \pi$ (на концах отрезка) сумма ряда равна

$$S(-\pi) = S(\pi) = \frac{f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)}{2}.$$



Таким образом, если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям 1 и 2 теоремы (*условия Дирихле*), то на отрезке $[-\pi;\pi]$ имеет место разложе-

ние (20.12):

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

причем коэффициенты вычисляются по формулам (20.13)–(20.15). Это равенство может нарушиться только в точках разрыва функции $f(x)$ и на концах отрезка $[-\pi; \pi]$.

В силу периодичности исходной функции и суммы ряда Фурье может быть получено указанное разложение во всей области определения функции.

Замечания.

1. Если функция $f(x)$ с периодом 2π на отрезке $[0; 2\pi]$ удовлетворяет условиям Дирихле, то для нее имеет место разложение (20.12), где коэффициенты вычисляются по формулам

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\,dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx\,dx,\ n = 1, 2, 3, \ldots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx\,dx,\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

(Интегралы $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$ и $\int\limits_0^{2\pi} f(x)\,dx$ равны в силу свойства 3 периодической функции — см. п. 20.1.)

2. Условиям Дирихле удовлетворяют большинство функций, которые встречаются в математике и ее приложениях. Существуют функции, не удовлетворяющие условиям Дирихле, но при этом разложимые в ряд Фурье, т. е. теорема Дирихле дает лишь достаточное условие разложимости, но не необходимое.

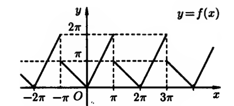
Пример 21.1. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ периода 2π, заданную на отрезке $[-\pi; \pi]$ формулой

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ -x & \text{при } -\pi \leqslant x < 0. \end{cases}$$

Решение: На рисунке 49 изображен график функции $f(x)$. Эта функция удовлетворяет условиям Дирихле, значит, она разложима в ряд Фурье. Находим коэффициенты ряда:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} (-x)\,dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 2x\,dx = \frac{3\pi}{2},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\,dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} (-x) \cos nx\,dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 2x \cos nx\,dx =$$



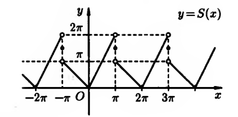


Рис. 49.

$$\left(\text{интегрируем по частям: } \left[\begin{array}{l|l} u = x & du = dx \\ dv = \cos nx\,dx & v = \frac{1}{n}\sin nx \end{array}\right]\right)$$

$$= \frac{-1}{\pi}\left(\frac{x}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0}\right) + \frac{2}{\pi}\left(\frac{x}{n}\sin nx\Big|_{0}^{\pi} + \frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_{0}^{\pi}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\pi n^2}(1-\cos\pi n) + \frac{2}{\pi n^2}(\cos\pi n - 1) = -\frac{3}{\pi n^2}\big(1-(-1)^n\big).$$

Аналогично находим

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \dots = \frac{1}{n}(-1)^{n+1}.$$

Исходной функции $f(x)$ соответствует ряд Фурье

$$f(x) \sim S(x) = \frac{3\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{3}{\pi n^2}\big(1-(-1)^n\big)\cos nx + \frac{1}{n}(-1)^{n+1}\sin nx.$$

Функция $f(x)$ непрерывна во всех внутренних точкой отрезка $[-\pi;\pi]$, поэтому, согласно теореме Дирихле, для всех этих точек имеем равенство $f(x) = S(x)$, т. е.

$$f(x) = S(x) = \frac{3\pi}{4} - \frac{6}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots\right) +$$

$$+\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3} - \dots\right).$$

В точках $x = \pm\pi$ сумма $S(x)$ ряда равна

$$\frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2} = \frac{\pi + 2\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi.$$

Графики функций $f(x)$ и $S(x)$ показаны на рис. 49. ●

21.2. Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций

Если разлагаемая на отрезке $[-\pi;\pi]$ в ряд Фурье функция $f(x)$ является четной или нечетной, то это отражается на формулах коэффициентов Фурье (вычисление их упрощается) и на виде самого ряда (он становится так называемым неполным).

Если функция $f(x)$ *четная*, то ее ряд Фурье имеет вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \tag{21.1}$$

где

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx\,dx, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{21.2}$$

Если функция $f(x)$ *нечетная*, то ее ряд Фурье имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \tag{21.3}$$

где

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx\,dx, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{21.4}$$

❑ Как известно (см. Часть 1, п. 39.4), если функция $f(x)$ интегрируема на симметричном отрезке $[-a; a]$, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \begin{cases} 2 \cdot \int_0^a f(x)\,dx, & \text{если } f(x) \text{ — четная функция,} \\ 0, & \text{если } f(x) \text{ — нечетная функция.} \end{cases} \tag{21.5}$$

Если функция $f(x)$ — четная, то $f(x)\cos nx$ — четная функция ($f(-x)\cos(-nx) = f(x)\cos nx$), а $f(x)\sin nx$ — нечетная функция ($f(-x)\sin(-nx) = -f(x)\sin nx$).

Если же $f(x)$ — нечетная функция, то, очевидно, функция $f(x)\cos nx$ — нечетная, а $f(x)\sin nx$ — четная.

С учетом формулы (21.5) из формул (20.13)–(20.15) получаем формулы (21.1)–(21.4). ■



Ряды (21.1) и (21.3) называются ***неполными*** тригонометрическими рядами, или рядами *по косинусам* и *по синусам* соответственно.

Пример 21.2. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = x$, $x \in (-\pi; \pi)$, $T = 2\pi$.

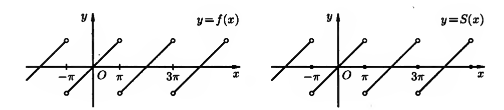


Рис. 50.

❍ Решение: На рисунке 50 изображен график заданной функции. Условиям Дирихле функция $y = x$ удовлетворяет. Эта функция — нечетная. Следовательно, $a_n = 0$, $n = 0, 1, \ldots$, а

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{x}{n}\cos nx\Big|_0^\pi + \frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_0^\pi\right) = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\right)\cos\pi n,$$

т. е. $b_n = \frac{2}{n}\cdot(-1)^{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$. Ряд Фурье содержит только синусы:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\cdot(-1)^{n+1}\cdot\sin nx = 2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots\right).$$

При этом $S(\pm\pi) = \frac{-\pi+\pi}{2} = 0$ (см. рис. 50). ●

21.3. Разложение в ряд Фурье функций произвольного периода

Разлагать в ряд Фурье можно и периодические функции с периодом, отличным от 2π.

Пусть функция $f(x)$, определенная на отрезке $[-l; l]$, имеет период $2l$ $(f(x+2l) = f(x)$, где l — произвольное положительное число) и удовлетворяет на этом отрезке условиям Дирихле.

Сделав подстановку $x = \frac{l}{\pi}t$, данную функцию $f(x)$ преобразуем в функцию $\varphi(t) = f\left(\frac{l}{\pi}t\right)$, которая определена на отрезке $[-\pi; \pi]$ и имеет период $T = 2\pi$.

Действительно, если $t = -\pi$, то $x = -l$, если $t = \pi$, то $x = l$ и при $-\pi < t < \pi$ имеем $-l < x < l$;

$$\varphi(t+2\pi) = f\left(\frac{l}{\pi}(t+2\pi)\right) = f\left(\frac{l}{\pi}t + 2l\right) = f\left(\frac{lt}{\pi}\right) = \varphi(t),$$

т. е. $\varphi(t+2\pi) = \varphi(t)$.

Разложение функции $\varphi(t)$ в ряд Фурье на отрезке $[-\pi; \pi]$ имеет вид

$$\varphi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nt + b_n\sin nt,$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\cos nt\,dt \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\sin nt\,dt \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Возвращаясь к переменной x и заметив, что $t = \frac{\pi x}{l}$, $dt = \frac{\pi}{l}dx$, получим

$$\boxed{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{\pi n x}{l} + b_n\sin\frac{\pi n x}{l},} \qquad (21.6)$$

где

$$\boxed{\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}\,dx \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),\\ b_n &= \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx \quad (n = 1, 2, \ldots).\end{aligned}} \tag{21.7}$$

Ряд (21.6) с коэффициентами, вычисляемыми по формулам (21.7), называется ***рядом Фурье*** для ***функции*** $f(x)$ с периодом $T = 2l$.

Замечание. Все теоремы, имеющие место для рядов Фурье 2π-периодических функций, остаются в силе и для рядов Фурье функций, период которых $T = 2l$. В частности, если $f(x)$ на отрезке $[-l; l]$ ***четная***, то ее ряд Фурье имеет вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{l}, \tag{21.8}$$

где

$$a_0 = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}\,dx, \quad n = 1, 2, \ldots; \tag{21.9}$$

если $f(x)$ — ***нечетная*** функция, то

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi n x}{l}, \tag{21.10}$$

где

$$b_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{21.11}$$

Пример 21.3. Разложить функцию $f(x) = x$ на интервале $(-4; 4)$ в ряд Фурье.

○ Решение: Данная функция нечетная, удовлетворяет условиям Дирихле. По формулам (21.10) и (21.11), при $l = 4$, имеем:

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi n x}{4},$$

где $b_n = \frac{2}{4}\int\limits_0^4 x \sin\frac{\pi n x}{4}\,dx$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Вычисляем b_n:

$$b_n = \frac{1}{2}\left(-x\frac{4}{\pi n}\cos\frac{\pi n x}{4}\Big|_0^4 + \frac{4}{\pi n}\cdot\frac{4}{\pi n}\sin\frac{\pi n x}{4}\Big|_0^4\right) =$$

$$= -\frac{8}{\pi n}\cos\pi n = \frac{8}{\pi n}\cdot(-1)^{n+1}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Таким образом,

$$x = \frac{8}{\pi}\left(\frac{\sin\frac{\pi x}{4}}{1} - \frac{\sin\frac{2\pi x}{4}}{2} + \frac{\sin\frac{3\pi x}{4}}{3} - \ldots\right)$$

для $-4 < x < 4$. ●

21.4. Представление непериодической функции рядом Фурье

Пусть $y = f(x)$ — непериодическая функция, заданная на всей числовой оси ($-\infty < x < \infty$).

Такая функция не может быть разложена в ряд Фурье, т. к. сумма ряда Фурье есть функция периодическая и, следовательно, не может быть равна $f(x)$ для всех x.

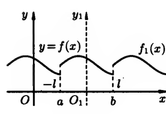


Рис. 51.

Однако *непериодическая функция* $f(x)$ *может быть представлена в виде ряда Фурье* на любом *конечном промежутке* $[a;b]$, на котором она удовлетворяет условиям Дирихле. Для этого можно поместить начало координат в середину отрезка $[a;b]$ и построить функцию $f_1(x)$ периода $T = 2l = |b-a|$ такую, что $f_1(x) = f(x)$ при $-l \leqslant x \leqslant l$. На рисунке 51 приведена иллюстрация построения функции $f_1(x)$.

Разлагаем функцию $f_1(x)$ в ряд Фурье. Сумма этого ряда во всех точках отрезка $[a;b]$ (кроме точек разрыва) совпадает с заданной функцией $f(x)$. Вне этого промежутка сумма ряда и $f(x)$ являются совершенно различными функциями.

Пусть теперь непериодическую функцию $f(x)$ требуется разложить в ряд Фурье на отрезке $[0;l]$. (Это частный случай: начало координат перенесено в точку $x = a$ отрезка $[a;b]$; область определения функции $f(x)$ будет иметь вид $[0;l]$, где $l = |b-a|$.)

Такую функцию можно произвольным образом доопределить на отрезке $[-l;0]$, а затем осуществить ее периодическое продолжение с периодом $T = 2l$. Разложив в ряд Фурье на отрезке $[-l;l]$ полученную таким образом периодическую функцию $f_1(x)$, получим искомый ряд для функции $f(x)$ при $x \in [0;l]$.

Рис. 52.

В частности, функцию $f(x)$ можно доопределить на отрезке $[-l;0]$ четным образом (т. е. чтобы при $-l \leqslant x \leqslant 0$ было $f(x) = f(-x)$) — см. рис. 52. В этом случае функция $f(x)$ разлагается в ряд Фурье, который содержит только косинусы (см. формулы (21.8) и (21.9)).

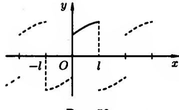


Рис. 53.

Если же функцию $f(x)$ продолжить на отрезок $[-l;0]$ нечетным образом (см. рис. 53), то она разлагается в ряд, состоящий только из синусов (см. формулы (21.10) и (21.11)).

Ряд косинусов и ряд синусов для функции $f(x)$, заданной на отрезке $[0; l]$, имеют одну и ту же сумму. Если x_0 — точка разрыва функции $f(x)$, то сумма как одного, так и другого ряда равна одному и тому же числу: $S(x_0) = \dfrac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2}$.

Замечание. Все, что было сказано о разложении в ряд Фурье функции $f(x)$ на отрезке $[0; l]$, переносится практически без изменения на случай, когда функция задана на отрезке $[0; \pi]$; такую функцию можно разложить как в ряд косинусов, так и в ряд синусов (формулы (21.1) и (21.3)).

Пример 21.4. Разложить в ряд косинусов функцию $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$, $0 < x < \pi$.

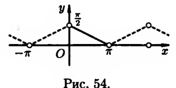


Рис. 54.

Решение: Продолжим функцию $f(x)$ на отрезок $[-\pi; 0]$ четным образом (см. рис. 54). Разлагаем в ряд функцию

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{\pi - x}{2}, & 0 < x < \pi, \\ \frac{\pi + x}{2}, & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

с периодом $T = 2\pi$. Условиям теоремы Дирихле функция $f_1(x)$ удовлетворяет. Используя формулы (21.1) и (21.2), находим:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\pi - x}{2}\,dx = \frac{\pi}{2}, \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\pi - x}{2}\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi n^2}(1 - \cos\pi n).$$

Таким образом,

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right),$$

где $0 < x < \pi$ $\left(\text{при этом } S(0) = \dfrac{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{2},\ S(\pm\pi) = \frac{0 + 0}{2} = 0\right)$. ●

21.5. Комплексная форма ряда Фурье

Ряды Фурье часто применяются в комплексной форме записи. Преобразуем ряд (20.12) и его коэффициенты (20.13)–(20.15) к комплексной форме. Для этого используем формулы Эйлера, выражающие косинус и синус через показательную функцию:

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}, \quad \sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$$

(из формулы Эйлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ и вытекающего из нее равенства $e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$ находим, что $\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$, $\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$).

Подставив эти выражения в ряд (20.12), находим:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_n \cdot \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} - ib_n \cdot \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2} =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a_n - ib_n)e^{inx}}{2} + \frac{(a_n + ib_n)e^{-inx}}{2} =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}, \quad (21.12)$$

где обозначено $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$, $c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$.

Найдем выражения для комплексных коэффициентов c_n и c_{-n}. Используя выражения для a_n и b_n (формулы (20.14) и (20.15)), получим:

$$c_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx - i\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx - i\sin nx)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx,$$

т. е.

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), \quad (21.13)$$

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \quad (21.14)$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx + i\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx + i\sin nx)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}dx \quad (n = 1, 2, 3 \ldots).$$

$$(21.15)$$

Таким образом, формулу (21.12) можно записать в виде

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}, \quad \text{или} \quad f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}. \quad (21.16)$$

Коэффициенты этого ряда, согласно формулам (21.13)–(21.15), можно записать в виде

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \quad (21.17)$$



Равенство (21.16) называется ***комплексной формой ряда Фурье функции*** $f(x)$, а числа c_n, найденные по формуле (21.17), — ***комплексными коэффициентами ряда Фурье***.

Если функция $f(x)$ задается на отрезке $[-l;l]$, то комплексная форма ее ряда Фурье имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{l}}, \quad c_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{-\frac{in\pi x}{l}}\,dx \quad (n = 0, \pm1, \pm2, \dots). \tag{21.18}$$

Как видим, комплексная форма ряда Фурье (и коэффициентов) более компактна, чем обыкновенный ряд Фурье.

В электротехнике и радиотехнике члены ряда $c_n e^{i\frac{\pi n x}{l}}$ называются *гармониками*, коэффициенты c_n — *комплексными амплитудами* гармоник, а числа $\omega_n = \frac{\pi n}{l}$ $(n = 0, \pm1, \pm2, \dots)$ — *волновыми числами* функции $f(x) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n x}$.

Совокупность величин $\{c_1, c_2, \dots, c_n, \dots\}$ называется *амплитудным спектром.*

Графически амплитудный спектр изображается в виде вертикальных отрезков длиной c_n, расположенных в точках $\omega_n = \frac{\pi n}{l}$ числовой оси.

Пример 21.5. Построить ряд Фурье в комплексной форме для 2-периодической функции

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1;0), \\ 1 & x \in [0;1], \end{cases} \qquad T = 2.$$

Рис. 55.

Решение: На рисунке 55 изображен график функции $f(x)$. По формулам (21.18) находим $(l = 1)$:

$$c_n = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-i\pi n x}dx = -\frac{e^{-i\pi n x}}{2\pi n i}\bigg|_0^1 = \frac{-1}{2\pi n i}\left(e^{-i\pi n} - 1\right) =$$

$$= \frac{i}{2\pi n}(\cos\pi n - i\sin\pi n - 1) = \frac{(-1)^n - 1}{2\pi n}i, \quad n \neq 0; \quad c_0 = \frac{1}{2}\int_0^1 dx = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, для всех точек непрерывности функции $f(x)$ справедливо равенство

$$f(x) = \frac{1}{2} + i\sum_{\substack{n=-\infty \\ (n\neq 0)}}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{2\pi n} e^{i\pi n x} =$$

$$= \frac{1}{2} - i\left(\frac{e^{i\pi x}}{\pi} + \frac{e^{-\pi x}}{\pi} + \frac{e^{3i\pi x}}{3\pi} + \frac{e^{-3i\pi x}}{3\pi} + \dots\right)$$

$\left(S(0) = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2},\ S(\pm1) = \frac{1+1}{2} = 1,\ \text{на графике } S(x) \text{ не отмечена}\right)$. ●

§ 22. ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

Как известно, всякую (периодическую или непериодическую) функцию $f(x)$, удовлетворяющую на отрезке $[-l;l]$ условиям теоремы Дирихле, можно разложить в ряд Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\omega_n x + b_n \sin\omega_n x, \tag{22.1}$$

где $\omega_n = \frac{\pi n}{l}$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\omega_n t\,dt \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \\ b_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin\omega_n t\,dt \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned} \tag{22.2}$$

Это разложение будет справедливым на всей числовой оси Ox в том случае, когда $f(x)$ — периодическая функция с периодом $T = 2l$.

Рассмотрим случай, когда $f(x)$ — непериодическая функция, заданная на бесконечном промежутке $(-\infty;\infty)$ (т. е. $l = +\infty$).

Будем предполагать, что на любом конечном промежутке $[-l;l]$ функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Дирихле и что сходится следующий несобственный интеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx = M < \infty.$$

Говорят: $f(x)$ *абсолютно интегрируема* на всей числовой оси.

Подставляя в ряд (22.1) значения коэффициентов a_n и b_n (22.2), получим:

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\,dt + \frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l} f(t)(\cos\omega_n t\cdot\cos\omega_n x + \sin\omega_n t\cdot\sin\omega_n x)\,dt,$$

т. е.

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\,dt + \frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l} f(t)\cdot\cos\omega_n(t-x)\,dt. \tag{22.3}$$

Будем теперь неограниченно увеличивать l. Первое слагаемое в правой части равенства (22.3) при $l \to +\infty$ стремится к нулю, т. к.

$$\left|\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\,dt\right| \leqslant \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} |f(t)|dt \leqslant \frac{1}{2l}\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt = \frac{M}{2l} \to 0.$$

Рассмотрим второе слагаемое в равенстве (22.3). Величина $\omega_n = \frac{\pi n}{l}$ принимает значения $\omega_1 = \frac{\pi}{l}$, $\omega_2 = \frac{2\pi}{l}$, $\omega_3 = \frac{3\pi}{l}$, …, образующие бесконечную арифметическую прогрессию с разностью $\Delta\omega_n = \frac{\pi}{l}$ ($\Delta\omega_n = \omega_{n+1} - \omega_n$,

$n = 0, 1, 2, \ldots$), при этом $\Delta\omega_n \to 0$ при $l \to +\infty$. Итак,

$$\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l} f(t)\cdot\cos\omega_n(t-x)\,dt = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l} f(t)\cdot\cos\omega_n(t-x)\,dt\cdot\frac{\pi}{l} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-l}^{l} f(t)\cdot\cos\omega_n(t-x)\,dt\right)\Delta\omega_n = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(\omega_n)\cdot\Delta\omega_n,$$

где $\varphi(\omega_n) = \int\limits_{-l}^{l} f(t)\cdot\cos\omega_n(t-x)\,dt$, $\omega_n = \frac{\pi}{l}, \frac{2\pi}{l}, \ldots, \frac{n\pi}{l}, \ldots$

Полученная сумма напоминает интегральную сумму для функции

$$\varphi(\omega) = \int_{-l}^{l} f(t)\cdot\cos\omega(t-x)\,dt, \quad \omega\in(0;+\infty)$$

(доказывается, что так оно и есть), поэтому, переходя в равенстве (22.3) к пределу при $l \to +\infty$, получаем

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\lim_{l\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(\omega_n)\Delta\omega_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\varphi(\omega)\,d\omega,$$

или

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega(t-x)\,dt. \qquad (22.4)$$

Формула (22.4) называется ***формулой Фурье***, а интеграл в правой части формулы — ***интегралом Фурье*** для функции $f(x)$.

Формула Фурье имеет место в точках непрерывности функции $f(x)$; в точках разрыва данной функции интеграл Фурье равен среднему арифметическому ее односторонних пределов:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega(t-x)\,dt = \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}.$$

Формулу (22.4) можно переписать в другом виде (в виде однократного интеграла):

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega(t-x)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\big(\cos\omega t\cdot\cos\omega x + \sin\omega t\cdot\sin\omega x\big)dt =$$

$$= \int_0^{\infty} d\omega\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\,dt\cdot\cos\omega x + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t\,dt\cdot\sin\omega x\right),$$

т. е.

$$f(x)=\int\limits_0^{\infty}\big(A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x\big)\,d\omega,\tag{22.5}$$

где

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\omega t\,dt,$$
$$B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin\omega t\,dt.$$

Как видно, есть аналогия между рядом Фурье и интегралом Фурье: в обоих случаях функция $f(x)$ раскладывается на сумму гармонических составляющих. Однако, ряд Фурье суммируется по индексу n, принимающему дискретные значения $n=1,2,3,\ldots$, в интеграле Фурье производится интегрирование по непрерывной переменной ω.

Некоторые сведения, связанные с интегралом Фурье, изложим в виде замечаний.

Замечания.

1. Если функция $f(x)$ — *четная,* то формула Фурье (22.5) принимает вид

$$f(x)=\int\limits_0^{\infty}A(\omega)\cos\omega x\,d\omega,\quad \text{где}\quad A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}f(t)\cos\omega t\,dt;\tag{22.6}$$

в случае нечетной функции —

$$f(x)=\int\limits_0^{\infty}B(\omega)\sin\omega x\,d\omega,\quad \text{где}\quad B(\omega)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}f(t)\sin\omega t\,dt.\tag{22.7}$$

2. Если функция $f(x)$ задана лишь на промежутке $(0;+\infty)$, то ее можно продолжить на промежуток $(-\infty;0)$ разными способами, в частности — четным или нечетным образом: в первом случае она будет представлена формулой (22.6), во втором — формулой (22.7).

3. Формулу Фурье (22.5) можно представить в симметричной форме записи, если положить в формулах (22.6) и (22.7) $A(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\widetilde{A}(\omega)$, $B(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\widetilde{B}(\omega)$. В случае четной функции

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\infty}\widetilde{A}(\omega)\cos\omega x\,d\omega,\quad \text{где}\quad \widetilde{A}(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\infty}f(t)\cos\omega t\,dt;$$

в случае нечетной функции

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\infty}\widetilde{B}(\omega)\sin\omega x\,d\omega,\quad \text{где}\quad \widetilde{B}(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\infty}f(t)\sin\omega t\,dt.$$

Функции $\widetilde{A}(\omega)$ и $\widetilde{B}(\omega)$ называются соответственно ***косинус-преобразованием*** и ***синус-преобразованием Фурье*** для функции $f(x)$.

4. *Интеграл Фурье* (22.4) *в комплексной форме* имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt;$$

интеграл Фурье (22.5) имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega) e^{i\omega x} d\omega,$$

где $c(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$; или в симметричной форме записи

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{c}(\omega) e^{i\omega x} d\omega,$$

где

$$\widetilde{c}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

$(c(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widetilde{c}(\omega))$.

Пример 22.1. Представить интегралом Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \in (0; +\infty), \\ 0, & x = 0, \\ e^{x}, & x \in (-\infty; 0). \end{cases}$$

○ Решение: Функция удовлетворяет условиям представимости интегралом Фурье, абсолютно интегрируема на промежутке $(-\infty; +\infty)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx = \int_{-\infty}^{0} e^{x} dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x}\, dx = 2.$$

Функция нечетная, применим формулу (22.7):

$$B(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{+\infty} e^{-t} \sin \omega t\, dt = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\omega}{1 + \omega^2}.$$

Следовательно,

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{+\infty} \frac{\omega}{1 + \omega^2} \cdot \sin \omega x\, d\omega, \quad x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty).$$ ●

Замечание. Интересно отметить, что если $x = 1$, то

$$f(1) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{\omega \sin \omega}{1 + \omega^2} \, d\omega.$$

С другой стороны, $f(1) = e^{-1} = \frac{1}{e}$. Таким образом,

$$\int\limits_0^\infty \frac{y \sin y}{1 + y^2} \, dy = f(1) \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2e}.$$

Иными словами, при помощи представления функций интегралом Фурье иногда можно вычислить величины несобственных интегралов.

Глава VII. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Лекции 23–26

§ 23. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Теория поля — крупный раздел физики, механики, математики, в котором изучаются скалярные, векторные, тензорные поля.

К рассмотрению скалярных и векторных полей приводят многие задачи физики, электротехники, математики, механики и других технических дисциплин. Изучение одних физических полей способствует изучению и других. Так, например, силы всемирного тяготения, магнитные, электрические силы — все они изменяются обратно пропорционально квадрату расстояния от своего источника; диффузия в растворах происходит по законам, общим с распространением тепла в различных средах; вид силовых магнитных линий напоминает картину обтекания препятствий жидкостью и т. д.

Математическим ядром теории поля являются такие понятия, как градиент, поток, потенциал, дивергенция, ротор, циркуляция и другие. Эти понятия важны и в усвоении основных идей математического анализа функций многих переменных.

Полем называется область V пространства, в каждой точке которой определено значение некоторой величины. Если каждой точке M этой области соответствует определенное число $U = U(M)$, говорят, что в области определено (задано) ***скалярное поле*** (или ***функция точки***). Иначе говоря, скалярное поле — это скалярная функция $U(M)$ вместе с ее областью определения. Если же каждой точке M области пространства соответствует некоторый вектор $\bar{a} = \bar{a}(M)$, то говорят, что задано ***векторное поле*** (или *векторная функция точки*).

Примерами скалярных полей могут быть поля температуры (воздуха, тела, ...), атмосферного давления, плотности (массы, воздуха, ...), электрического потенциала и т. д. Примерами векторных полей являются поле силы тяжести, поле скоростей частиц текущей жидкости (ветра), магнитное поле, поле плотности электрического тока и т. д.

Если функция $U(M)$ ($\bar{a}(M)$) не зависит от времени, то скалярное (векторное) поле называется *стационарным* (или установившимся); поле, которое меняется с течением времени (меняется, например, скалярное поле температуры при охлаждении тела), называется *нестационарным* (или неустановившимся).

Далее будем рассматривать только стационарные поля.

Если V — область трехмерного пространства, то скалярное поле U можно рассматривать как функцию трех переменных x, y, z (координат точки M):

$$U = U(x; y; z). \tag{23.1}$$

(Наряду с обозначениями $U = U(M)$, $U = U(x; y; z)$, используют запись $U = U(\bar{r})$, где $\bar{r}$ — радиус-вектор точки M.)

Если скалярная функция $U(M)$ зависит только от двух переменных, например x и y, то соответствующее скалярное поле $U(x; y)$ называют *плоским.*

Аналогично: вектор $\bar{a} = \bar{a}(M)$, определяющий векторное поле, можно рассматривать как векторную функцию трех скалярных аргументов x, y и z: $\bar{a} = \bar{a}(x; y; z)$ (или $\bar{a} = \bar{a}(\bar{r})$).

Вектор $\bar{a} = \bar{a}(M)$ можно представить (разложив его по ортам координатных осей) в виде

$$\bar{a} = P(x; y; z)\bar{i} + Q(x; y; z)\bar{j} + R(x; y; z)\bar{k},$$

где $P(x; y; z)$, $Q(x; y; z)$, $R(x; y; z)$ — проекции вектора $\bar{a}(M)$ на оси координат. Если в выбранной системе координат $Oxyz$ одна из проекций вектора $\bar{a} = \bar{a}(M)$ равна нулю, а две другие зависят только от двух переменных, то векторное поле называется *плоским.* Например, $\bar{a} = P(x; y)\bar{i} + Q(x; y)\bar{j}$.

Векторное поле называется *однородным*, если $\bar{a}(M)$ — постоянный вектор, т. е. P, R и Q — постоянные величины. Таким полем является поле тяжести. Здесь $P = 0$, $Q = 0$, $R = -mg$, g — ускорение силы тяжести, m — масса точки.

В дальнейшем будем предполагать, что скалярные функции ($U(x; y; z)$ — определяющая скалярное поле, $P(x; y; z)$, $Q(x; y; z)$ и $R(x; y; z)$ — задающие векторное поле) непрерывны вместе со своими частными производными.

Пример 23.1. Функция $U = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$ определяет скалярное поле в точках пространства, ограниченного сферой с центром в начале координат и радиусом $R = 1$; скалярное поле $U = \frac{z}{x^2 + y^2}$ определено во всем пространстве, за исключением точек оси Oz (на ней $x^2 + y^2 = 0$).

Пример 23.2. Найти поле линейной скорости $\overline{V}$ материальной точки M, вращающейся против часовой стрелки с угловой скоростью $\bar{\omega}$ вокруг оси Oz (см. Часть 1, п. 7.4).

Рис. 56.

○ Решение: Угловую скорость представим в виде вектора $\bar{\omega}$, лежащего на оси Oz, направленного вверх. Имеем:

$$\bar{\omega} = (0; 0; \omega) \quad (\bar{\omega} = \omega\bar{k}).$$

Построим радиус-вектор $\bar{r} = (x; y; z)$ точки M (см. рис. 56).

Численное значение линейной скорости $\overline{V}$ (модуль), как известно из курса физики, равно $\omega\rho$, где ρ — расстояние вращающейся точки $M(x; y; z)$ от оси вращения (оси Oz). Но $\rho = r\sin\varphi$ (φ — угол между вектором $\bar{r}$ и осью Oz). Следовательно, $V = \omega\rho = \omega \cdot r \cdot \sin\varphi$, т. е. $V = |\bar{\omega} \times \bar{r}|$.

Вектор скорости $\overline{V}$ направлен в сторону вращения, совпадает с направлением векторного произведения $\bar{\omega} \times \bar{r}$ ($\overline{V} \perp \bar{r}$, $\overline{V} \perp \bar{\omega}$, векторы $\bar{\omega}$, $\bar{r}$, $\overline{V}$

образуют правую тройку). Следовательно, $\overline{V} = \overline{\omega} \times \overline{r}$, т. е.

$$\overline{V} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\omega y\overline{i} + \omega x\overline{j} + 0 \cdot \overline{k} \quad \text{или} \quad \overline{V} = (-\omega y; \omega x; 0).$$

Поле линейных скоростей $\overline{V}$ тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, есть плоское векторное поле. ●

§ 24. СКАЛЯРНОЕ ПОЛЕ

24.1. Поверхности и линии уровня

Рассмотрим скалярное поле, задаваемое функцией $U = U(x; y; z)$. Для наглядного представления скалярного поля используют поверхности и линии уровня.

Поверхностью уровня скалярного поля называется геометрическое место точек, в которых функция $U(M)$ принимает постоянное значение, т. е.

$$U(x; y; z) = c. \tag{24.1}$$

Давая в уравнении (24.1) величине c различные значения, получим различные поверхности уровня, которые в совокупности как бы расслаивают поле. Через каждую точку поля проходит только одна поверхность уровня. Ее уравнение можно найти путем подстановки координат точки в уравнение (24.1).

Для скалярного поля, образованного функцией $U = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$, поверхностями уровня является множество концентрических сфер с центрами в начале координат: $\sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2} = c$. В частности, при $c = 1$ получим $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, т. е. сфера стягивается в точку.

Для равномерно раскаленной нити поверхности уровня температурного поля (изотермические поверхности) представляют собой круговые цилиндры, общей осью которых служит нить.

В случае плоского поля $U = U(x; y)$ равенство $U(x; y) = c$ представляет собой уравнение ***линии уровня*** поля, т. е. линия уровня — это линия на плоскости Oxy, в точках которой функция $U(x; y)$ сохраняет постоянное значение.

В метеорологии, например, сети изобар и изотерм (линии одинаковых средних давлений и одинаковых средних температур) являются линиями уровня и представляют собой функции координат точек местности.

Линии уровня применяются в математике при исследовании поверхностей методом сечений (см. Часть 1, п. 12.9).

24.2. Производная по направлению

Для характеристики скорости изменения поля $U = U(M)$ в заданном направлении введем понятие «производной по направлению».

Возьмем в пространстве, где задано поле $U = U(x; y; z)$, некоторую точку M и найдем скорость изменения функции U при движении точки

M в произвольном направлении $\bar{\lambda}$. Пусть вектор $\bar{\lambda}$ имеет начало в точке M и направляющие косинусы $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$.

Приращение функции U, возникающее при переходе от точки M к некоторой точке M_1 в направлении вектора $\bar{\lambda}$ определяется как

$$\Delta U = U(M_1) - U(M),$$

или

$$\Delta U = U(x + \Delta x; y + \Delta y; z + \Delta z) - U(x; y; z)$$

(см. рис. 57). Тогда

$$\Delta\lambda = |MM_1| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}.$$

Рис. 57.

Производной от функции $U = U(M)$ в точке M по направлению $\bar{\lambda}$ называется предел

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = \lim_{\Delta\lambda \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta \lambda} = \lim_{M_1 \to M} \frac{U(M_1) - U(M)}{|MM_1|}.$$

Производная по направлению $\bar{\lambda}$ и характеризует скорость изменения функции (поля) в точке M по этому направлению. Если $\frac{\partial U}{\partial \lambda} > 0$, то функция U возрастает в направлении $\bar{\lambda}$, если $\frac{\partial U}{\partial \lambda} < 0$, то функция U в направлении $\bar{\lambda}$ убывает. Кроме того, величина $\left|\frac{\partial U}{\partial \lambda}\right|$ представляет собой мгновенную скорость изменения функции U в направлении $\bar{\lambda}$ в точке M: чем больше $\left|\frac{\partial U}{\partial \lambda}\right|$, тем быстрее изменяется функция U. В этом состоит физический смысл производной по направлению.

Выведем формулу для вычисления производной по направлению, считая, что функция $U(x; y; z)$ дифференцируема в точке M. Тогда ее полное приращение в этой точке M можно записать так:

$$\Delta U = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \Delta y + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \Delta z + \xi_1 \Delta x + \xi_2 \Delta y + \xi_3 \Delta z,$$

где ξ_1, ξ_2, ξ_3 — бесконечно малые функции при $\Delta\lambda \to 0$ (см. Часть 1, п. 44.3).

Поскольку $\Delta x = \Delta\lambda \cos\alpha$, $\Delta y = \Delta\lambda\cos\beta$, $\Delta z = \Delta\lambda\cos\gamma$, то

$$\frac{\Delta U}{\Delta \lambda} = \frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma + \xi_1\cos\alpha + \xi_2\cos\beta + \xi_3\cos\gamma.$$

Переходя к пределу при $\Delta\lambda \to 0$, получим формулу для вычисления производной по направлению:

$$\boxed{\frac{\partial U}{\partial \lambda} = \frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma.} \tag{24.2}$$

В случае плоского поля $U = U(x; y)$ имеем: $\cos\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$, $\cos\gamma = 0$. Формула (24.2) принимает вид:

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = \frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\sin\alpha.$$

Замечание. Понятие производной по направлению является обобщением понятия частных производных $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$, $\frac{\partial U}{\partial z}$. Их можно рассматривать как производные от функции u по направлению координатных осей Ox, Oy и Oz. Так, если направление $\bar{\lambda}$ совпадает с положительным направлением оси Ox, то, положив в формуле (24.2) $\alpha = 0$, $\beta = \frac{\pi}{2}$, $\gamma = \frac{\pi}{2}$, получим $\frac{\partial U}{\partial \lambda} = \frac{\partial U}{\partial x}$.



Пример 24.1. Найти производную функции $U = x^2 + y^2 - 4yz$ в точке $M(0;1;2)$ в направлении от этой точки к точке $M_1(2;3;3)$.

○ Решение: Находим вектор $\overline{MM_1}$ и его направляющие косинусы:

$$\overline{MM_1} = (2;2;1), \quad \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{2}{3}, \quad \cos\beta = \frac{2}{3}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{3}.$$

Находим частные производные функции и вычисляем их значения в точке M:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 2y - 4z, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = -4y,$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_M = 2 \cdot 0 = 0, \quad \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_M = 2 - 4 \cdot 2 = -6, \quad \left.\frac{\partial U}{\partial z}\right|_M = -4.$$

Следовательно, по формуле (24.2) имеем:

$$\left.\frac{\partial U}{\partial \lambda}\right|_M = 0 \cdot \frac{2}{3} - 6 \cdot \frac{2}{3} - 4 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{16}{3}.$$

Поскольку $\frac{\partial U}{\partial \lambda} < 0$, то заданная функция в данном направлении убывает. ●

24.3. Градиент скалярного поля и его свойства

В каком направлении $\bar{\lambda}$ производная $\frac{\partial U}{\partial \lambda}$ имеет наибольшее значение? Это направление указывает вектор, называемый градиентом скалярного поля.

Можно заметить, что правая часть равенства (24.2) представляет собой скалярное произведение единичного вектора $\bar{e} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$ и некоторого вектора $\bar{g} = \left(\frac{\partial U}{\partial x}; \frac{\partial U}{\partial y}; \frac{\partial U}{\partial z}\right)$.



Вектор, координатами которого являются значения частных производных функции $U(x;y;z)$ в точке $M(x;y;z)$, называют ***градиентом функции*** и обозначают $\operatorname{grad} U$, т. е. $\operatorname{grad} U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}; \frac{\partial U}{\partial y}; \frac{\partial U}{\partial z}\right)$, или

$$\boxed{\operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\bar{k}.}$$

Отметим, что $\operatorname{grad} U$ есть векторная величина. Говорят: скалярное поле U порождает векторное поле градиента U. Теперь равенство (24.2) можно записать в виде

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = \bar{e} \cdot \operatorname{grad} U,$$

или

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = |\operatorname{grad} U| \cdot \cos\varphi, \tag{24.3}$$

где φ — угол между вектором $\operatorname{grad} U$ и направлением $\bar{\lambda}$ (см. рис. 58).

Рис. 58.

Из формулы (24.3) сразу следует, что производная по направлению достигает наибольшего значения, когда $\cos\varphi = 1$, т. е. при $\varphi = 0$. Таким образом, направление градиента совпадает с направлением $\bar{\lambda}$, вдоль которого функция (поле) меняется быстрее всего, т. е. *градиент функции указывает направление наибыстрейшего возрастания функции.* Наибольшая скорость изменения функции U в точке M равна

$$|\operatorname{grad} U| = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}.$$

В этом состоит физический смысл градиента. На указанном свойстве градиента основано его широкое применение в математике и других дисциплинах.

Приведем важные *свойства градиента* функции.

1. Градиент направлен по нормали к поверхности уровня, проходящей через данную точку.

❏ Действительно, по любому направлению вдоль поверхности уровня ($U = c$) $\frac{\partial U}{\partial \lambda} = 0$. Но тогда из (24.3) следует, что $\cos\varphi = 0$, т. е. $\varphi = \frac{\pi}{2}$. ■

2. $\operatorname{grad}(U + V) = \operatorname{grad} U + \operatorname{grad} V$,

3. $\operatorname{grad}(c \cdot U) = c \cdot \operatorname{grad} U$, $c = \text{const}$,

4. $\operatorname{grad}(U \cdot V) = U \operatorname{grad} V + V \operatorname{grad} U$,

5. $\operatorname{grad}(\frac{U}{V}) = \frac{V \operatorname{grad} U - U \operatorname{grad} V}{V^2}$,

6. $\operatorname{grad} F(U) = \frac{\partial f}{\partial U} \operatorname{grad} U$.

❏ Доказываются эти свойства на основании определения градиента. Докажем, например, последнее свойство. Имеем:

$$\operatorname{grad} f(U) = \frac{\partial}{\partial x}(f(U))\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}(f(U))\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}(f(U))\bar{k} =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial U} \cdot \frac{\partial U}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial f}{\partial U} \cdot \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \bar{j} + \frac{\partial f}{\partial U} \cdot \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \bar{k} = \frac{\partial f}{\partial U} \cdot \operatorname{grad} U. \quad ■$$

Замечание. Приведенные свойства градиента функции остаются справедливыми и для плоского поля.

Пример 24.2. Найти наибольшую скорость возрастания функции $U = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$ в точке $A(-1;1;-1)$.

Решение: Имеем:

$$\operatorname{grad} U = \left(\frac{1}{y} - \frac{z}{x^2}\right)\bar{i} + \left(\frac{-x}{y^2} + \frac{1}{z}\right)\bar{j} + \left(\frac{-y}{z^2} + \frac{1}{x}\right)\bar{k};$$

$$\operatorname{grad} U(-1;1;-1) = 2\bar{i} + 0\bar{j} - 2\bar{k} = 2\bar{i} - 2\bar{k}.$$

Наибольшая скорость возрастания функции равна

$$|\operatorname{grad} U(A)| = \sqrt{4+0+4} = 2\sqrt{2}.$$

Отметим, что функция U будет убывать с наибольшей скоростью ($2\sqrt{2}$), если точка A движется в направлении $-\operatorname{grad} U(A) = -2\bar{i} + 2\bar{k}$ (антиградиентное направление). ●

§ 25. ВЕКТОРНОЕ ПОЛЕ

25.1. Векторные линии поля

Рассмотрим векторное поле, задаваемое вектором $\bar{a} = \bar{a}(M)$. Изучение поля удобно начинать с понятия векторных линий; они являются простейшими геометрическими характеристиками поля.

Векторной линией поля $\bar{a}$ называется линия, касательная к которой в каждой ее точке M имеет направление соответствующего ей вектора $\bar{a}(M)$.

Это понятие для конкретных полей имеет ясный физический смысл. Например, в поле скоростей текущей жидкости векторными линиями будут линии, по которым движутся частицы жидкости (линии тока); для магнитного поля векторными (силовыми) линиями будут линии, выходящие из северного полюса и оканчивающиеся в южном.

Совокупность всех векторных линий поля, проходящих через некоторую замкнутую кривую, называется *векторной трубкой*.

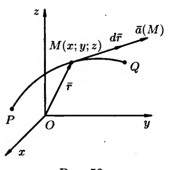


Рис. 59.

Изучение векторного поля обычно начинают с изучения расположения его векторных линий. Векторные линии поля

$$\bar{a} = P(x;y;z)\bar{i} + Q(x;y;z)\bar{j} + R(x;y;z)\bar{k} \qquad (25.1)$$

описываются системой дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{P(x;y;z)} = \frac{dy}{Q(x;y;z)} = \frac{dz}{R(x;y;z)}. \qquad (25.2)$$

❑ Действительно, пусть PQ — векторная линия поля, $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ — ее радиус-вектор. Тогда вектор $d\bar{r} = dx \cdot \bar{i} + dy \cdot \bar{j} + dz \cdot \bar{k}$ направлен по касательной к линии PQ в точке M (см. рис. 59).

В силу коллинеарности векторов $\bar{a}$ и $d\bar{r}$ следует пропорциональность их проекций, т. е. равенства (25.2). ■

Пример 25.1. Найти векторные линии поля линейных скоростей тела, вращающегося с постоянной угловой скоростью $\bar{\omega}$ вокруг оси Oz.

Решение: Это поле определено вектором $\overline{V} = -\omega y\bar{i} + \omega x\bar{j}$ (см. пример 23.2). Согласно (25.2), имеем:

$$\frac{dx}{-\omega y} = \frac{dy}{\omega x} = \frac{dz}{0} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \omega x\,dx = -\omega y\,dy, \\ 0 \cdot dy = \omega x\,dz. \end{cases}$$

Интегрируя, получим: $\begin{cases} x^2 + y^2 = c_1, \\ z = c_2, \end{cases}$ т. е. векторные линии данного поля представляют собой окружности с центрами на оси Oz, лежащие в плоскостях, перпендикулярных к этой оси. ●

25.2. Поток поля

Пусть векторное поле образовано вектором (25.1). Для наглядности будем считать $\bar{a}(M)$ вектором скорости некоторого потока жидкости, движущейся стационарно. Представим, что некоторая поверхность S находится в этом потоке и пропускает жидкость. Подсчитаем, какое количество жидкости протекает через поверхность S.

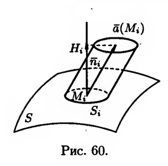


Рис. 60.

Выберем определенную сторону поверхности S. Пусть $\bar{n} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$ — единичный вектор нормали к рассматриваемой стороне поверхности S. Разобьем поверхность на элементарные площадки $S_1, S_2, \ldots, S_n$. Выберем в каждой площадке точку M_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ (см. рис. 60) и вычислим значения вектора скорости $\bar{a}(M)$ в каждой точке: $\bar{a}(M_1)$, $\bar{a}(M_2), \ldots, \bar{a}(M_n)$.

Будем приближенно считать каждую площадку плоской, а вектор $\bar{a}$ постоянным по модулю и одинаково направленным в каждой точке площадки. Тогда за единицу времени через S_i протекает количество жидкости, приближенно равное $K_i \approx H_i \cdot \Delta S_i$, где ΔS_i — площадь i-й площадки, H_i — высота i-го цилиндра с образующей $\bar{a}(M_i)$. Но H_i является проекцией вектора $\bar{a}(M_i)$ на нормаль $\bar{n}_i$: $H_i = \text{пр}_{\bar{n}_i}\bar{a}(M_i) = \bar{a}(M_i) \cdot \bar{n}_i$, где $\bar{n}_i$ — единичный вектор нормали к поверхности в точке M_i. Следовательно, общее количество жидкости, протекающее через всю поверхность S за единицу времени, найдем, вычислив сумму

$$K \approx \sum_{i=1}^{n} \bar{a}(M_i) \cdot \bar{n}_i \cdot \Delta S_i.$$

Точное значение искомого количества жидкости получим, взяв предел найденной суммы при неограниченном увеличении числа элементарных площадок и стремлении к нулю их размеров (диаметров d_i площадок):

$$K = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\max d_i \to 0)}} \sum_{i=1}^{n} \bar{a}(M_i) \cdot \bar{n}_i \cdot \Delta S_i = \iint_S \bar{a}(M) \cdot \bar{n} \cdot ds.$$

Независимо от физического смысла поля $\bar{a}(M)$ полученный интеграл называют потоком векторного поля.

Потоком вектора $\bar{a}$ через поверхность S называется интеграл по поверхности от скалярного произведения вектора поля на единичный вектор нормали к поверхности, т. е.

$$K = \iint\limits_S \bar{a}\bar{n}\, ds. \tag{25.3}$$

Рассмотрим различные формы записи потока вектора. Так как

$$\bar{a}\cdot\bar{n} = |\bar{n}|\cdot \text{пр}_{\bar{n}}\bar{a} = \text{пр}_{\bar{n}}\bar{a} = a_n$$

(см. Часть 1, (6.2)), то

$$K = \iint\limits_S a_n\, ds, \tag{25.4}$$

где a_n — проекция вектора $\bar{a}$ на направление нормали $\bar{n}$, ds — дифференциал (элемент) площади поверхности.

Иногда формулу (25.3) записывают в виде

$$K = \iint\limits_S \bar{a}\,\overline{ds},$$

где вектор $\overline{ds}$ направлен по нормали к поверхности, причем $|\overline{ds}| = ds$.

Так как $\bar{n} = (\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma)$, $\bar{a} = (P;Q;R)$, где $P = P(x;y;z)$, $Q = Q(x;y;z)$, $R = R(x;y;z)$ — проекции вектора $\bar{a}$ на соответствующие координатные оси, то поток (25.3) вектора $\bar{a}$, можно записать в виде

$$K = \iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, ds.$$

Используя взаимосвязь поверхностных интегралов I и II рода (см. формулу (12.8)), поток вектора можно записать как

$$\boxed{K = \iint\limits_S P\,dy\,dz + Q\,dx\,dz + R\,dx\,dy.} \tag{25.5}$$

Отметим, что поток K вектора $\bar{a}$ есть скалярная величина. Величина K равна объему жидкости, которая протекает через поверхность S за единицу времени. В этом состоит физический смысл потока (независимо от физического смысла поля).

Особый интерес представляет случай, когда поверхность замкнута и ограничивает некоторый объем V. Тогда поток вектора записывается в виде $K = \oiint\limits_S \bar{a}\bar{n}\, ds$ $\left(\text{иногда } \oint\limits_S \bar{a}\bar{n}\, ds \text{ или } \oint\limits_S a_n\, ds, \ldots\right)$.

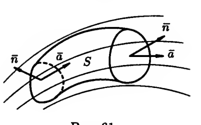


Рис. 61.

В этом случае за направление вектора $\bar{n}$ обычно берут направление внешней нормали и говорят о потоке изнутри поверхности S (см. рис. 61).

Если векторное поле $\bar{a} = \bar{a}(M)$ есть поле скоростей текущей жидкости, то величина потока K

через замкнутую поверхность дает разность между количеством жидкости, вытекающей из области V (объема V) и втекающей в нее за единицу времени (в точках поверхности S, где векторные линии выходят из объема V, внешняя нормаль образует с вектором $\bar{a}$ острый угол и $\bar{a} \cdot \bar{n} > 0$; в точках, где векторные линии входят в объем, $\bar{a} \cdot \bar{n} < 0$).

При этом если $K > 0$, то из области V вытекает больше жидкости, чем в нее втекает. Это означает, что внутри области имеются дополнительные *источники*.

Если $K < 0$, то внутри области V имеются *стоки*, поглощающие избыток жидкости.

Можно сказать, что источники — точки, откуда векторные линии начинаются, а стоки — точки, где векторные линии кончаются. Так, в электростатическом поле источником является положительный заряд, стоком — отрицательный заряд магнита (см. рис. 62).

Если $K = 0$, то из области V вытекает столько же жидкости, сколько в нее втекает в единицу времени; внутри области либо нет ни источников, ни стоков, либо они таковы, что их действие взаимно компенсируется.

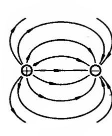


Рис. 62.

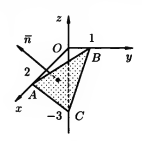


Рис. 63.

Пример 25.2. Найти поток вектора $\bar{a} = z \cdot \bar{i} - x \cdot \bar{j} + y \cdot \bar{k}$ через верхнюю сторону треугольника, полученного при пересечении плоскости $3x + 6y - 2z - 6 = 0$ с координатными плоскостями (см. рис. 63).

Решение: Поток найдем методом проектирования на три координатные плоскости. Для этого воспользуемся формулой (25.5). В нашем случае $P = z$, $Q = -x$, $R = y$. Имеем:

$$K = \iint\limits_S z\,dy\,dz - x\,dx\,dz + y\,dx\,dy.$$

Расчленим этот поверхностный интеграл на три слагаемых, затем сведем их вычисление к вычислению двойных интегралов. Нормаль к верхней стороне треугольника образует с осью Ox тупой угол, с осью Oy — тупой, а с осью Oz — острый угол. (Единичный вектор данной плоскости есть $\bar{n} = \pm\left(\frac{3}{7}\bar{i} + \frac{6}{7}\bar{j} - \frac{2}{7}\bar{k}\right)$; на верхней стороне $\cos\gamma > 0$, поэтому надо выбрать знак «минус»; получим: $\cos\alpha = -\frac{3}{7}$, $\cos\beta = -\frac{6}{7}$, $\cos\gamma = \frac{2}{7}$.)

Итак, $K = K_1 + K_2 + K_3$. Находим K_1, K_2, K_3:

$$K_1 = \iint\limits_S z\,dy\,dz = -\iint\limits_{BOC} z\,dy\,dz = -\int\limits_0^1 dy \int\limits_{3y-3}^{0} z\,dz = \cdots = \frac{3}{2},$$

$$K_2 = -\iint\limits_S x\,dx\,dz = \iint\limits_{AOC} x\,dx\,dz = \int\limits_0^2 x\,dx \int\limits_{\frac{3x-6}{2}}^{0} dz = \cdots = 2,$$

$$K_3 = \iint\limits_S y\,dx\,dy = \iint\limits_{AOB} y\,dx\,dy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\frac{6-3x}{6}} y\,dy = \cdots = \frac{1}{3}.$$

В результате имеем: $K = \frac{3}{2} + 2 + \frac{1}{3} = 3\frac{5}{6}$. ●



Пример 25.3. Найти поток радиус-вектора $\bar{r}$ через внешнюю сторону поверхности прямого конуса, вершина которого совпадает с точкой $O(0;0;0)$, если известны радиус основания R и высота конуса H (см. рис. 64).

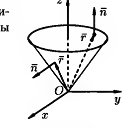


Рис. 64.

❍ Решение:

$$K = \oiint\limits_S r_n ds = \iint\limits_{\text{бок.пов.}} r_n ds + \iint\limits_{\text{осн.}} r_n ds = K_1 + K_2.$$

Очевидно, что $K_1 = 0$, т. к. $\text{пр}_{\bar{n}}\bar{r} = 0$;

$$K_2 = \iint\limits_{\text{осн.}} r_n ds = H \cdot \iint\limits_{\text{осн.}} ds = H \cdot \pi R^2,$$

т. к. $\text{пр}_{\bar{n}}\bar{r} = H$. Итак, $K = \pi H R^2$. ●

25.3. Дивергенция поля. Формула Остроградского–Гаусса

Важной характеристикой векторного поля (25.1) является так называемая дивергенция, характеризующая распределение и интенсивность источников и стоков поля.

Дивергенцией (или расходимостью) ***векторного поля***

$$\bar{a}(M) = P(x;y;z)\bar{i} + Q(x;y;z)\bar{j} + R(x;y;z)\bar{k}$$

в точке M называется скаляр вида $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$ и обозначается символом $\operatorname{div}\bar{a}(M)$, т. е.

$$\boxed{\operatorname{div}\bar{a}(M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.} \qquad (25.6)$$

Отметим некоторые *свойства* дивергенции.

1. Если $\bar{a}$ — постоянный вектор, то $\operatorname{div}\bar{a} = 0$.
2. $\operatorname{div}(c \cdot \bar{a}) = c \cdot \operatorname{div}\bar{a}$, где $c = \text{const}$.
3. $\operatorname{div}(\bar{a} + \bar{b}) = \operatorname{div}\bar{a} + \operatorname{div}\bar{b}$, т. е. дивергенция суммы двух векторных функций равна сумме дивергенции слагаемых.
4. Если U — скалярная функция, $\bar{a}$ — вектор, то $\operatorname{div}(U \cdot \bar{a}) = U \cdot \operatorname{div}\bar{a} + \bar{a}\operatorname{grad}U$.

Эти свойства легко проверить, используя формулу (25.6). Докажем, например, справедливость свойства 4.

❑ Так как $U \cdot \bar{a} = U \cdot P \cdot \bar{i} + U \cdot Q \cdot \bar{j} + U \cdot R \cdot \bar{k}$, то

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(U \cdot \bar{a}) &= \frac{\partial}{\partial x}(U \cdot P) + \frac{\partial}{\partial y}(U \cdot Q) + \frac{\partial}{\partial z}(U \cdot R) = \\ &= U\frac{\partial P}{\partial x} + P\frac{\partial U}{\partial x} + U\frac{\partial Q}{\partial y} + Q\frac{\partial U}{\partial y} + U\frac{\partial R}{\partial z} + R\frac{\partial U}{\partial z} = \\ &= U\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) + P\frac{\partial U}{\partial x} + Q\frac{\partial U}{\partial y} + R\frac{\partial U}{\partial z} = \\ &= U \cdot \operatorname{div}\bar{a} + \bar{a} \cdot \operatorname{grad} U. \quad ■ \end{aligned}$$

Используя понятия потока и дивергенции векторного поля, запишем известную в анализе (см. (12.9)) формулу Остроградского–Гаусса

$$\oiint\limits_S P\,dy\,dz + Q\,dx\,dz + R\,dx\,dy = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dv \qquad (25.7)$$

в так называемой векторной форме.

Рассматривая область V, ограниченную замкнутой поверхностью S, в векторном поле (25.1), можно утверждать, что левая часть формулы (25.7) есть поток вектора $\bar{a}$ через поверхность S; подынтегральная функция правой части формулы есть дивергенция вектора $\bar{a}$. Следовательно, формулу (25.7) можно записать в виде

$$\oiint\limits_S a_n\,ds = \iiint\limits_V \operatorname{div}\bar{a} \cdot dv \qquad (25.8)$$

(в котором она чаще всего и встречается).

Формула Остроградского–Гаусса означает, что *поток векторного поля через замкнутую поверхность* S (*в направлении внешней нормали*, т. е. изнутри) *равен тройному интегралу от дивергенции* этого *поля по объему* V, *ограниченному данной поверхностью.*

Используя формулу (25.8), можно дать другое определение дивергенции векторного поля $\bar{a}(M)$ в точке M (не связанное с выбором координатных осей).

По теореме о среднем для тройного интеграла (см. п. 8.1) имеем:

$$\iiint\limits_V \operatorname{div}\bar{a}(M)\,dv = V \cdot \operatorname{div}\bar{a}(M_0),$$

где M_0 — некоторая (средняя) точка области V. Тогда формулу (25.8) можно переписать в виде $\oiint\limits_S a_n\,dS = V \cdot \operatorname{div}\bar{a}(M_0)$. Отсюда

$$\operatorname{div}\bar{a}(M_0) = \frac{1}{V}\oiint\limits_S a_n\,ds.$$

Пусть поверхность S стягивается в точку. Тогда $V \to 0$, $M_0 \to M$, и мы получаем выражение для $\operatorname{div}\bar{a}(M)$ в точке M:

$$\operatorname{div}\bar{a}(M) = \lim_{V \to 0}\frac{1}{V}\oiint\limits_S a_n\,ds. \qquad (25.9)$$



Дивергенцией векторного поля в точке M называется предел отношения потока поля через (замкнутую) поверхность S, окружающую точку M, к объему тела, ограниченного этой поверхностью, при условии, что вся поверхность стягивается в точку M ($V \to 0$).

Определение (25.9) дивергенции эквивалентно (можно показать) определению (25.6).

Как видно из определения, дивергенция векторного поля в точке является скалярной величиной. Она образует скалярное поле в данном векторном поле.

Исходя из физического смысла потока (обычно условно считают, что $\bar{a}(M)$ есть поле скоростей фиктивного стационарного потока несжимаемой жидкости), можно сказать, что: при $\operatorname{div}\bar{a}(M) > 0$ точка M представляет собой источник, откуда жидкость вытекает; при $\operatorname{div}\bar{a}(M) < 0$ точка M есть сток, поглощающий жидкость. Как следует из равенства (25.9), величина $\operatorname{div}\bar{a}(M)$ характеризует мощность (интенсивность, плотность) источника или стока в точке M. В этом состоит физический смысл дивергенции.

Понятно, что если в объеме V, ограниченном замкнутой поверхностью S, нет ни источников, ни стоков, то $\operatorname{div}\bar{a} = 0$.

Векторное поле, в каждой точке которого дивергенция поля равна нулю, т. е. $\operatorname{div}\bar{a}(M) \equiv 0$, называется ***соленоидальным*** (или трубчатым).



Пример 25.4. Найти дивергенцию поля линейных скоростей $\overline{V}$ жидкости, вращающейся как твердое тело вокруг неподвижной оси с постоянной угловой скоростью $\overline{\omega}$.

○ Решение: Примем ось вращения жидкости за ось Oz. Тогда, как показано ранее (см. пример 23.2), $\overline{V} = -\omega y\bar{i} + \omega x\bar{j} + 0\cdot\bar{k}$. Имеем:

$$\operatorname{div}\overline{V}(M) = \frac{\partial}{\partial x}(-\omega y) + \frac{\partial}{\partial y}(\omega x) + \frac{\partial}{\partial z}(0) = 0.$$

Поле $\overline{V}$ — соленоидальное. ●

25.4. Циркуляция поля

Пусть векторное поле образовано вектором (25.1). Возьмем в этом поле некоторую замкнутую кривую L и выберем на ней определенное направление.

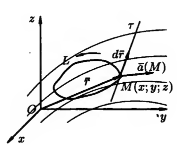


Рис. 65.

Пусть $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ — радиус-вектор точки M на контуре L. Известно, что вектор $d\bar{r} = dx\cdot\bar{i} + dy\cdot\bar{j} + dz\cdot\bar{k}$ направлен по касательной к кривой в направлении ее обхода (см. рис. 65) и $|d\bar{r}| = dl$, где dl — дифференциал дуги кривой ($dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$).



Криволинейный интеграл по замкнутому контуру L от скалярного произведения вектора $\bar{a}$ на вектор $d\bar{r}$, касательный к контуру L, назы-

вается ***циркуляцией вектора*** $\bar{a}$ вдоль L, т. е.

$$C = \oint_L \bar{a}\, d\bar{r}. \tag{25.10}$$

Рассмотрим различные формы записи циркуляции. Так как

$$\bar{a} \cdot d\bar{r} = |d\bar{r}| \cdot \text{пр}_{d\bar{r}}\bar{a} = a_\tau \cdot dl = P\,dx + Q\,dy + R\,dz,$$

где a_τ — проекция вектора $\bar{a}$ на касательную τ, проведенную в направлении обхода кривой L, то равенство (25.10) можно записать в виде

$$C = \oint_L a_\tau \cdot dl, \tag{25.11}$$

или

$$C = \oint_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz. \tag{25.12}$$

Циркуляция C, записанная в виде (25.12) имеет простой физический смысл: если кривая L расположена в силовом поле, то циркуляция — это работа силы $\bar{a}(M)$ поля при перемещении материальной точки вдоль L (п.10.5).

Отметим, что вдоль замкнутых векторных линий циркуляция отлична от нуля, потому что в каждой точке векторной линии скалярное произведение $\bar{a}d\bar{r}$ сохраняет знак: положительный, если направление вектора $\bar{a}$ совпадает с направлением обхода векторной линии; отрицательный — в противном случае.

Пример 25.5. Найти циркуляцию вектора поля линейных скоростей вращающегося тела (см. пример 23.2) $\bar{V} = -\omega y\bar{i} + \omega x\bar{j}$ вдоль замкнутой кривой L, лежащей в плоскости α, перпендикулярной оси вращения.

Решение: Будем считать, что направление нормали к плоскости α совпадает с направлением оси Oz. Согласно формуле (25.12), имеем:

$$C = \oint_L -\omega y\,dx + \omega x\,dy = \omega \oint_L -y\,dx + x\,dy =$$

$$= 2\omega\left(\frac{1}{2}\oint_L -y\,dx + x\,dy\right) = 2\omega \cdot S,$$

где S — площадь поверхности, ограниченной кривой L (см. 10.17).

Заметим, что если нормаль к поверхности S образует угол γ с осью Oz, то циркуляция будет равна $C = 2\omega \cdot S \cdot \cos\gamma$; с изменением угла γ величина C изменяется. ●

Пример 25.6. Вычислить циркуляцию векторного поля

$$\bar{a} = (x - 2z)\bar{i} + (x + 3y + z)\bar{j} + (5x + y)\bar{k}$$

вдоль периметра треугольника с вершинами $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;1)$ (см. рис. 66).

❍ Решение: Согласно формуле (25.12), имеем:

$$C = \oint\limits_L (x-2z)\,dx + (x+3y+z)\,dy + (5x+y)\,dz = \int\limits_{AB} + \int\limits_{BC} + \int\limits_{CA}.$$

На отрезке AB: $x+y=1$, $z=0$, следовательно,

$$\int\limits_{AB} = \int\limits_1^0 (x-0)\,dx + (x+3-3x+0)\cdot(-dx) + 0 = \frac{3}{2}.$$

На отрезке BC: $y+z=1$, $x=0$, следовательно,

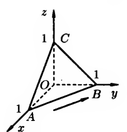


Рис. 66.

$$\int\limits_{BC} = \int\limits_1^0 (0-2+2y)\cdot 0 + (0+3y+1-y)\,dy + (0+y)\cdot(-dy) = -\frac{3}{2}.$$

На отрезке CA: $x+z=1$, $y=0$, следовательно,

$$\int\limits_{CA} = \int\limits_0^1 (x-2+2x)\,dx + 0 - 1(5x+0)\cdot(-dx) = -3.$$

Следовательно,

$$C = \oint\limits_{ABCA} = \int\limits_{AB} + \int\limits_{BC} + \int\limits_{CA} = \frac{3}{2} + \left(-\frac{3}{2}\right) + (-3) = -3. \quad \bullet$$

25.5. Ротор поля. Формула Стокса



Ротором (или вихрем) ***векторного поля***

$$\bar{a} = P(x;y;z)\bar{i} + Q(x;y;z)\bar{j} + R(x;y;z)\bar{k}$$

называется вектор, обозначаемый $\operatorname{rot}\bar{a}(M)$ и определяемый формулой

$$\boxed{\operatorname{rot}\bar{a}(M) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\bar{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\bar{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\bar{k}.} \qquad (25.13)$$

Формулу (25.13) можно записать с помощью символического определителя в виде, удобном для запоминания:

$$\operatorname{rot}\bar{a}(M) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Отметим некоторые *свойства* ротора.

1. Если $\bar{a}$ — постоянный вектор, то $\operatorname{rot}\bar{a} = 0$.

2. $\operatorname{rot}(c\cdot\bar{a}) = c\cdot\operatorname{rot}\bar{a}$, где $c = \text{const}$.

3. $\operatorname{rot}(\bar{a}+\bar{b}) = \operatorname{rot}\bar{a} + \operatorname{rot}\bar{b}$, т. е. ротор суммы двух векторов равен сумме роторов слагаемых.

4. Если U — скалярная функция, а $\bar{a}(M)$ — векторная, то

$$\operatorname{rot}(U\cdot\bar{a}) = U\operatorname{rot}\bar{a} + \operatorname{grad}U \times \bar{a}.$$

Эти свойства легко проверить, используя формулу (25.13). Покажем, например, справедливость свойства 3:

❏ $$\operatorname{rot}(\bar{a}+\bar{b}) = \left(\frac{\partial}{\partial y}(R_1+R_2) - \frac{\partial}{\partial z}(Q_1+Q_2)\right)\bar{i} +$$
$$+\left(\frac{\partial}{\partial z}(P_1+P_2) - \frac{\partial}{\partial x}(R_1+R_2)\right)\bar{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x}(Q_1+Q_2) - \frac{\partial}{\partial y}(P_1+P_2)\right)\bar{k} =$$
$$= \left(\frac{\partial R_1}{\partial y} - \frac{\partial Q_1}{\partial z}\right)\bar{i} + \left(\frac{\partial P_1}{\partial z} - \frac{\partial R_1}{\partial x}\right)\bar{j} + \left(\frac{\partial Q_1}{\partial x} - \frac{\partial P_1}{\partial y}\right)\bar{k} + \cdots = \operatorname{rot}\bar{a} + \operatorname{rot}\bar{b}.$$ ■

Используя понятия ротора и циркуляции, векторного поля, запишем известную в математическом анализе (см. п. 12.4) формулу Стокса:

$$\oint\limits_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint\limits_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\,dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dx\,dz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy. \quad (25.14)$$

Левая часть формулы (25.14) представляет собой циркуляцию вектора $\bar{a}$ по контуру L, т. е. $\oint\limits_L Pdx + Qdy + Rdz = \oint\limits_L a_\tau dl$ (см. (25.11)). Интеграл в правой части формулы (25.14) представляет собой поток вектора $\operatorname{rot}\bar{a}$ через поверхность S, ограниченную контуром L (см. (25.3)), т. е.

$$\iint\limits_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\,dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dx\,dz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \iint\limits_S \operatorname{rot}_n \bar{a}\,ds.$$

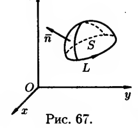


Рис. 67.

Следовательно, формулу Стокса можно записать в виде

$$\oint\limits_L a_\tau dl = \iint\limits_S \operatorname{rot}_n \bar{a}\,ds. \quad (25.15)$$

Такое представление формулы Стокса называют ее *векторной формой*. В этой формуле положительное направление на контуре L и выбор стороны у поверхности S согласованы между собой так же, как в теореме Стокса.

Формула (25.15) показывает, что *циркуляция вектора $\bar{a}$ вдоль замкнутого контура L равна потоку ротора этого вектора $\bar{a}$ через поверхность S, лежащую в поле вектора $\bar{a}$ и ограниченную контуром L* (натянутую на контур) (см. рис. 67).

Используя формулу (25.14), можно дать другое определение ротора поля, эквивалентное первому и не зависящее от выбора координатной системы.

Для этого применим формулу Стокса (25.15) для достаточно малой плоской площадки S с контуром L, содержащей точку M.

По теореме о среднем для поверхностного интеграла (п. 11.1, свойство 7) имеем:

$$\iint\limits_S \operatorname{rot}_n \bar{a} ds = \operatorname{rot}_n \bar{a}(M_0) \cdot S,$$

где M_0 — некоторая (средняя) точка площадки S (см. рис. 68).

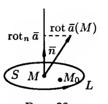


Рис. 68.

Тогда формулу (25.15) можно записать в виде

$$\oint\limits_L a_\tau dl = \operatorname{rot}_n \bar{a}(P) \cdot S.$$

Отсюда:

$$\operatorname{rot}_n \bar{a}(P) = \frac{1}{S} \oint\limits_L a_\tau \, dl.$$

Пусть контур L стягивается в точку M. Тогда $M_0 \to M$, а $S \to 0$. Перейдя к пределу, получаем:

$$\operatorname{rot}_n \bar{a}(M) = \lim_{S\to 0} \frac{1}{S} \oint\limits_L a_\tau \, dl.$$

Ротором вектора** $\bar{a}$ **в точке M называется вектор, проекция которого на каждое направление равна пределу отношения циркуляции вектора $\bar{a}$ по контуру L плоской площадки S, перпендикулярной этому направлению, к площади этой площадки.

Как видно из определения, ротор вектора $\bar{a}(M)$ есть векторная величина, образующая собственное векторное поле.

Дадим физическое истолкование понятия ротора векторного поля. Найдем ротор поля линейных скоростей твердого тела, вращающегося вокруг оси Oz с постоянной угловой скоростью (пример 23.2) $\bar{\omega}$, т. е. ротор вектора $\overline{V} = -\omega \cdot y \cdot \bar{i} + \omega \cdot x \cdot \bar{j}$.

По определению ротора

$$\operatorname{rot} \bar{a}(M) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y\omega & x\omega & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(0 - \frac{\partial(\omega x)}{\partial z}\right)\bar{i} - \left(0 - \frac{\partial(-y\omega)}{\partial z}\right)\bar{j} + \left(\frac{\partial(x\omega)}{\partial x} - \frac{\partial(-y\omega)}{\partial y}\right)\bar{k} = 0 - 0 + 2\omega\cdot\bar{k} = 2\bar{\omega}.$$

Ротор этого поля направлен параллельно оси вращения, его модуль равен удвоенной угловой скорости вращения.

С точностью до числового множителя ротор поля скоростей $\overline{V}$ представляет собой угловую скорость вращения твердого тела. С этим связано само название «ротор» (лат. «вращатель»).

Замечание. Из определения (25.13) ротора вытекает, что направление ротора — это направление, вокруг которого циркуляция имеет наибольшее значение (плотность) по сравнению с циркуляцией вокруг любого направления, не совпадающего с нормалью к площадке S.

Так что связь между ротором и циркуляцией аналогична связи между градиентом и производной по направлению (см. п. 24.3).

§ 26. ОПЕРАТОР ГАМИЛЬТОНА

26.1. Векторные дифференциальные операции первого порядка

Основными дифференциальными операциями (действиями) над скалярным полем U и векторным полем $\bar{a}$ являются $\operatorname{grad} U$, $\operatorname{div} \bar{a}$, $\operatorname{rot} \bar{a}$. Действия взятия градиента, дивергенции и ротора называются ***векторными операциями первого порядка*** (в них участвуют только первые производные).

Эти операции удобно записывать с помощью так называемого *оператора Гамильтона*

$$\boxed{\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k}.}$$

Этот символический вектор называют также оператором ∇ (читается «набла»); он приобретает определенный смысл лишь в комбинации со скалярными или векторными функциями. Символическое «умножение» вектора ∇ на скаляр U или вектор $\bar{a}$ производится по обычным правилам векторной алгебры, а «умножение» символов $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ на величины U, P, Q, R понимают как взятие соответствующей частной производной от этих величин.

Применяя оператор Гамильтона, получим дифференциальные операции первого порядка:

1. $\nabla U = \left(\frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k}\right) \cdot U = \frac{\partial U}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\bar{k} = \operatorname{grad} U.$

2. $\nabla \bar{a} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k}\right) \cdot (P \cdot \bar{i} + Q \cdot \bar{j} + R \cdot \bar{k}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \operatorname{div} \bar{a}.$

3. $\nabla \times \bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \operatorname{rot} \bar{a}.$

Оператор Гамильтона применяется для записи и других операций и для вывода различных формул в теории поля. При действиях с ним надо пользоваться правилами векторной алгебры и правилами дифференцирования.

В частности, производная по направлению (24.2) может быть записана в виде

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = \nabla U \cdot \bar{e} = (\bar{e} \cdot \nabla) \cdot U,$$

где $\bar{e} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$.

26.2. Векторные дифференциальные операции второго порядка

После применения оператора Гамильтона к скалярному или векторному полю получается новое поле, к которому можно снова применить этот оператор. В результате получаются ***дифференциальные операции второго порядка***. Нетрудно убедиться, что имеется лишь пять дифференциальных операций второго порядка: $\operatorname{div}\operatorname{grad} U$, $\operatorname{rot}\operatorname{grad} U$, $\operatorname{grad}\operatorname{div} \bar{a}$, $\operatorname{div}\operatorname{rot} \bar{a}$, $\operatorname{rot}\operatorname{rot} \bar{a}$.

(Понятно, что операция $\operatorname{div}\operatorname{div}\bar{a}$, например, не имеет смысла: $\operatorname{div}\bar{a}$ — скаляр, говорить о дивергенции скаляра, т. е. о $\operatorname{div}\operatorname{div}\bar{a}$, бессмысленно.)

Запишем явные выражения для дифференциальных операций второго порядка, используя оператор Гамильтона. Заметим при этом, что оператор действует только на множитель, расположенный непосредственно за оператором.



1. $\operatorname{div}\operatorname{grad}U=\nabla(\nabla U)=(\nabla\cdot\nabla)U=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\cdot U=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}.$
Правая часть этого равенства называется *оператором Лапласа* скалярной функции U и обозначается ΔU. Таким образом,

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}U=\Delta U=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}. \qquad (26.1)$$

Дифференциальное уравнение Лапласа $\Delta U=0$ играет важную роль в различных разделах математической физики. Решениями уравнения Лапласа являются так называемые *гармонические функции*.

Замечание. К равенству (26.1) можно прийти, введя в рассмотрение скалярный оператор дельта:

$$\Delta=\nabla\cdot\nabla=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

(который тоже называют оператором Лапласа).

2. $\operatorname{rot}\operatorname{grad}U=\nabla\times(\nabla U)=(\nabla\times\nabla)U=0$, так как векторное произведение двух одинаковых векторов равно нулю (нуль-вектор). Это означает, что поле градиента есть поле безвихревое.

3. $\operatorname{grad}\operatorname{div}\bar{a}=$

$$=\nabla(\nabla\cdot\bar{a})=\frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{div}\bar{a})\cdot\bar{i}+\frac{\partial}{\partial y}(\operatorname{div}\bar{a})\cdot\bar{j}+\frac{\partial}{\partial z}(\operatorname{div}\bar{a})\cdot\bar{k}=$$

$$=\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 Q}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 R}{\partial z\partial x}\right)\bar{i}+\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 R}{\partial y\partial z}\right)\bar{j}+$$

$$+\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 Q}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2 R}{\partial z^2}\right)\bar{k}.$$

4. $\operatorname{div}\operatorname{rot}\bar{a}=\nabla\cdot(\nabla\times\bar{a})=0$, так как смешанное произведение трех векторов, из которых два одинаковые, равно нулю. Это означает, что поле вихря — соленоидальное.

5. $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\bar{a}=\nabla\times(\nabla\times\bar{a})=\nabla(\nabla\cdot\bar{a})-(\nabla\cdot\nabla)\bar{a}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\bar{a}-\Delta\bar{a}$, так как двойное векторное произведение обладает свойством

$$\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})=\bar{b}\cdot\bar{a}\cdot\bar{c}-\bar{c}\cdot\bar{a}\cdot\bar{b}.$$

Здесь $\Delta\bar{a}=\Delta P\,\bar{i}+\Delta Q\,\bar{j}+\Delta R\,\bar{k}$ — векторная величина, полученная в результате применения оператора Лапласа к вектору $\bar{a}$.

§ 27. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ОСНОВНЫХ КЛАССОВ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

27.1. Соленоидальное поле

Напомним, что векторное поле $\bar{a}$ называется *соленоидальным*, если во всех точках его дивергенция поля равна нулю, т. е. $\operatorname{div}\bar{a}=0$.

Примерами соленоидальных полей являются: поле линейных скоростей вращающегося твердого тела (см. пример 25.4); магнитное поле, создаваемое прямолинейным проводником, вдоль которого течет электрический ток, и другие.

Приведем некоторые *свойства* соленоидального поля.

1. В соленоидальном поле $\bar{a}$ поток вектора через любую замкнутую поверхность равен нулю. Это свойство непосредственно вытекает из формулы (25.8). Таким образом, соленоидальное поле не имеет источников и стоков.

2. Соленоидальное поле является полем ротора некоторого векторного поля, т. е. если $\operatorname{div}\bar{a} = 0$, то существует такое поле $\bar{b}$, что $\bar{a} = \operatorname{rot}\bar{b}$. Вектор $\bar{b}$ называется ***векторным потенциалом*** поля $\bar{a}$.

Любое из свойств 1–2 можно было бы взять в качестве определения соленоидального поля.

Доказывать свойство 2 не будем. Отметим лишь, что обратное утверждение — поле ротора векторного поля есть соленоидальное — нами доказано (выше мы показали, что $\operatorname{div}\operatorname{rot}\bar{a} = 0$).

3. В соленоидальном поле $\bar{a}$ поток вектора через поперечное сечение векторной трубки сохраняет постоянное значение (называемое *интенсивностью* трубки).

❑ Рассмотрим векторную трубку между двумя ее произвольными сечениями S_1 и S_2; боковую поверхность трубки обозначим через S (см. рис. 69). Поток вектора через замкнутую поверхность, состоящую из S_1, S_2 и S, равен нулю. Следовательно,

$$\iint\limits_S a_n\,ds + \iint\limits_{S_1} a_n\,ds + \iint\limits_{S_2} a_n\,ds = \iiint\limits_V \operatorname{div}\bar{a}\,dv = 0,$$

где $\bar{n}$ — внешняя нормаль.

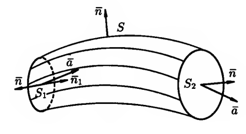


Рис. 69.

Так как на боковой поверхности векторной трубки нормаль $\bar{n}$ перпендикулярна к векторам поля, то $\iint\limits_S a_n\,ds = 0$ и, следовательно,

$$\iint\limits_{S_1} a_n\,ds = -\iint\limits_{S_2} a_n\,ds.$$

Переменив направление нормали на площадке S_1, т. е. взяв внутреннюю нормаль $\bar{n}_1$, получим:

$$\iint_{S_1} a_{n_1}\,ds = \iint_{S_2} a_n\,ds. \qquad \blacksquare$$

В поле скоростей текущей жидкости полученный результат означает, что количество жидкости, втекающей в трубку за единицу времени, равно количеству жидкости, вытекающей из нее.

27.2. Потенциальное поле

Векторное поле $\bar{a}$ называется *потенциальным* (или *безвихревым*, или *градиентным*), если во всех точках поля ротор равен нулю, т. е. $\operatorname{rot}\bar{a} = 0$. Примером потенциального поля является электрическое поле напряженности точечного заряда (и другие).

Приведем основные свойства потенциального поля.

Свойство 1. Циркуляция потенциального поля $\bar{a}$ по любому замкнутому контуру в этом поле равна нулю.

❑ Это непосредственно вытекает из формулы (25.14). Следовательно, $C = \oint\limits_L a_\tau dl = 0$. ■

В частности, для силового потенциального поля это означает, что работа силы по любому замкнутому контуру равна нулю; в поле скоростей текущей жидкости равенство $C = 0$ означает, что в потоке нет замкнутых струек, т. е. нет водоворотов.

Свойство 2. В потенциальном поле $\bar{a}$ криволинейный интеграл $\int\limits_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ вдоль любой кривой L с началом в точке M_1 и концом в точке M_2 зависит только от положения точек M_1 и M_2 и не зависит от формы кривой.

q, M_1, M_2, p

Рис. 70.

❑ Это свойство вытекает из свойства 1. Действительно, взяв в поле две точки M_1 и M_2, соединим их двумя кривыми M_1pM_2 и M_1qM_2 так, чтобы контур $M_1pM_2qM_1$ лежал внутри поля (см. рис. 70). Тогда, в силу свойства 1, имеем

$$\oint\limits_{M_1pM_2qM_1} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0.$$

Учитывая свойства криволинейного интеграла, получаем:

$$\oint\limits_{M_1pM_2qM_1} P\,dx + Q\,dy + R\,dz =$$

$$= \int\limits_{M_1pM_2} P\,dx + Q\,dy + R\,dz + \int\limits_{M_2qM_1} P\,dx + Q\,dy + R\,dz =$$

$$= \int\limits_{M_1pM_2} - \int\limits_{M_1qM_2} = 0,$$

т. е.
$$\int\limits_{M_1pM_2} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int\limits_{M_1qM_2} P\,dx + Q\,dy + R\,dz. \qquad \blacksquare$$

Свойство 3. Потенциальное поле является полем градиента некоторой скалярной функции $U(x;y;z)$, т. е. если $\operatorname{rot}\bar{a} = 0$, то существует функция $U(x;y;z)$ такая, что $\bar{a} = \operatorname{grad} U$.

☐ Из равенства $\operatorname{rot}\bar{a} = 0$ вытекает, что $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$, т. е. выражение $Pdx + Qdy + Rdz$ является полным дифференциалом некоторой функции $U = U(x;y;z)$ (следствие 10.1). Эту функцию называют потенциалом векторного поля $\bar{a} = P\bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k}$; $dU = Pdx + Qdy + Rdz$.

Отсюда: $P = \frac{\partial U}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial U}{\partial y}$, $R = \frac{\partial U}{\partial z}$. Следовательно,
$$\bar{a} = P\cdot\bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k} = \frac{\partial U}{\partial x}\cdot\bar{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\cdot\bar{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\cdot\bar{k} = \operatorname{grad} U,$$
т. е. вектор поля $\bar{a}$ является градиентом скалярного поля. ■

Замечание. Из равенства $\operatorname{rot}\operatorname{grad} U = 0$ следует обратное утверждение — поле градиента скалярной функции $U = U(x;y;z)$ является потенциальным.

Из равенства $\bar{a} = \operatorname{grad}\overline{U}$ следует, что потенциальное поле определяется заданием *одной* скалярной функции $U = U(x;y;z)$ — его потенциала. Потенциал векторного поля может быть найден по формуле
$$U(x;y;z) = \int\limits_{(x_0;y_0;z_0)}^{(x;y;z)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz =$$
$$= \int\limits_{x_0}^{x} P(\chi;y_0;z_0)\,d\chi + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x;\xi;z_0)\,d\xi + \int\limits_{z_0}^{z} R(x;y;\zeta)\,d\zeta + c, \quad (27.1)$$
где $(x_0;y_0;z_0)$ — координаты фиксированной точки, $(x;y;z)$ — координаты произвольной точки. Потенциал определяется с точностью до произвольного постоянного слагаемого (из-за того, что $\operatorname{grad}(U + a) = \operatorname{grad} U$).

Произвольное же векторное поле требует задания *трех* скалярных функций ($P(x;y;z)$, $Q(x;y;z)$, $R(x;y;z)$ — проекции вектора поля на оси координат).

Замечание. Определение потенциального поля может быть дано иначе — векторное поле $\bar{a}$ называется потенциальным, если оно является градиентом некоторого скалярного поля, т. е. $\bar{a} = \operatorname{grad} U$. (Иногда пишут $\bar{a} = -\operatorname{grad} U$; знак «минус» пишут для удобства, обычно векторные линии направлены в сторону убывания U: поток жидкости направлен туда, где давление меньше; теплота перемещается от более нагретого места к менее нагретому и т. д.)

Пример 27.1. Установить потенциальность поля
$$\bar{a}(M) = (yz - 2x)\bar{i} + (xz - 2y)\bar{j} + xy\bar{k}$$
и найти его потенциал.

❍ Решение: Имеем:

$$\operatorname{rot}\bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz-2x & xz-2y & xy \end{vmatrix} = (x-x)\bar{i} - (y-y)\bar{j} + (z-z)\bar{k} = 0.$$

Следовательно, поле вектора $\bar{a}$ потенциальное.

Найдем потенциал U по формуле (27.1), выбирая в качестве фиксированной точки начало координат, т. е. $x_0 = y_0 = z_0 = 0$. Так как $P(x;y_0;z_0) = -2x$, $Q(x;y;z_0) = -2y$, $R(x;y;z) = xy$, то

$$U(x;y;z) = \int_0^x (-2\chi)\,d\chi + \int_0^y (-2\xi)\,d\xi + \int_0^z xy\,d\zeta + c = -x^2 - y^2 + xyz + c. \quad \bullet$$

27.3. Гармоническое поле

Векторное поле $\bar{a}$ называется *гармоническим* (или *лапласовым*), если оно одновременно является потенциальным и соленоидальным, т. е. если $\operatorname{rot}\bar{a} = 0$ и $\operatorname{div}\bar{a} = 0$.

Примером гармонического поля является поле линейных скоростей стационарного безвихревого потока жидкости при отсутствии в нем источников и стоков.

Так как поле $\bar{a}$ потенциально, то его можно записать в виде $\bar{a} = \operatorname{grad} U$, где $U = U(x;y;z)$ — потенциал поля.

Но так как поле одновременно и соленоидальное, то

$$\operatorname{div}\bar{a} = \operatorname{div}\operatorname{grad} U = 0,$$

или, что то же самое,

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0,$$

т. е. потенциальная функция U гармонического поля $\bar{a}$ является решением дифференциального уравнения Лапласа. Такая функция называется, как уже упоминали, гармонической.

Глава VIII. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Лекции 27–32

§ 28. ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

28.1. Основные понятия

Пусть даны два множества D и E, элементами которых являются комплексные числа (см. Часть 1, гл. VI). Числа $z = x+iy$ множества D будем изображать точками комплексной плоскости z, а числа $w = u+iv$ множества E — точками комплексной плоскости w.

Если каждому числу (точке) $z \in D$ по некоторому правилу поставлено в соответствие определенное число (точка) $w \in E$, то говорят, что на множестве определена ***однозначная функция комплексного переменного*** $w = f(z)$, отображающая множество D в множество E (см. рис. 71).

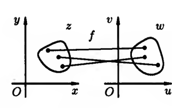


Рис. 71.

Если каждому $z \in D$ соответствует несколько значений w, то функция $w = f(z)$ называется *многозначной*.

Множество D называется *областью определения* функции $w = f(z)$; множество E_1 всех значений w, которые $f(z)$ принимает на E, называется *областью значений* этой функции (если же каждая точка множества E является значением функции, то E — область значений функции; в этом случае функция f отображает D на E).

Далее, как правило, будем рассматривать такие функции $w = f(z)$, для которых множества D и E_1 являются областями. *Областью* комплексной плоскости называется множество точек плоскости, обладающих свойствами открытости и связности (см. Часть 1, п. 43.1).

Функцию $w = f(z)$ можно записать в виде

$$u + iv = f(x + iy),$$

т. е.

$$f(x+iy) = u(x;y) + iv(x;y),$$

где

$$u = u(x;y) = \mathrm{Re} f(z), \quad v = v(x;y) = \mathrm{Im} f(z), \quad (x;y) \in D.$$

Функцию $u(x;y)$ при этом называют *действительной частью функции* $f(z)$, а $v(x;y)$ — *мнимой*.

Таким образом, задание функции комплексного переменного равносильно заданию двух функций двух действительных переменных.

Пример 28.1. Найти действительную и мнимую части функции $w = z^2$.

❍ Решение: Функцию $w = z^2$ можно записать в виде $u + iv = (x+iy)^2$, т. е.

$$u + iv = x^2 - y^2 + i2xy.$$

Отсюда следует: $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$. ●

28.2. Предел и непрерывность функции комплексного переменного

Пусть однозначная функция $w = f(z)$ определена в некоторой окрестности точки z_0, исключая, может быть, саму точку z_0. Под *δ-окрестностью точки* z_0 комплексной плоскости понимают внутренность круга радиуса δ с центром в точке z_0.

Число w_0 называется ***пределом функции*** $w = f(z)$ ***в точке*** z_0 (или при $z \to z_0$), если для любого положительного ε найдется такое положительное число δ, что для всех $z \neq z_0$, удовлетворяющих неравенству $|z - z_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(z) - w_0| < \varepsilon$.

Записывают: $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = w_0$. Это определение коротко можно записать так:

$$\big(\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall z : 0 < |z - z_0| < \delta \Longrightarrow |f(z) - w_0| < \varepsilon\big) \Longleftrightarrow \lim_{z\to z_0} f(z) = w_0.$$

Из определения следует, что если предел w_0 существует, то существуют и пределы

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x;y) = u_0 \quad \text{и} \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x;y) = v_0.$$

Верно и обратное утверждение.

Теоремы об арифметических свойствах пределов для функции одного (или нескольких) действительного переменного остаются справедливыми и для функции комплексного переменного. Так, если функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ имеют пределы в точке $z_0 \in D$, то

$$\lim_{z\to z_0} (c_1 f_1(z) \pm c_2 f_2(z)) = c_1 \lim_{z\to z_0} f_1(z) \pm c_2 \lim_{z\to z_0} f_2(z),$$

где c_1, c_2 — постоянные;

$$\lim_{z\to z_0} f_1(z)\cdot f_2(z) = \lim_{z\to z_0} f_1(z)\cdot \lim_{z\to z_0} f_2(z)$$

и

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f_1(z)}{f_2(z)} = \frac{\lim\limits_{z\to z_0} f_1(z)}{\lim\limits_{z\to z_0} f_2(z)},$$

если $\lim\limits_{z\to z_0} f_2(z) \neq 0$.

Пусть функция $w = f(z)$ определена в точке $z = z_0$ и в некоторой ее окрестности. Функция $w = f(z)$ называется ***непрерывной в точке*** z_0, если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Определение непрерывности можно сформулировать и так: функция $f(x)$ непрерывна в точке z_0, если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции:

$$\lim_{\Delta z\to 0} \Delta f(z) = 0.$$

Функция $f(z)$ непрерывна в области D, если она непрерывна в каждой точке этой области.

Модуль непрерывной функции комплексного переменного обладает теми же свойствами, что и непрерывная функция действительного переменного (см. Часть 1, теорема 43.1).

28.3. Основные элементарные функции комплексного переменного

Определим основные элементарные функции комплексного переменного $z = x + iy$.

Показательная функция



Показательная функция $w = e^z$ определяется формулой

$$w = e^z = e^x(\cos y + i\sin y). \tag{28.1}$$

Положив в этом равенстве $y = 0$, устанавливаем, что для действительных значений $z = x$ показательная функция e^z совпадает с показательной функцией действительного переменного: $e^z = e^x$.

Показательная функция $w = e^z$ обладает «известным» свойством: $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$. Действительно, по правилу умножения комплексных чисел («модули перемножаются, а аргументы складываются», Часть 1, п. 28.3), имеем:

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{x_1} \cdot e^{x_2}(\cos(y_1 + y_2) + i\sin(y_1 + y_2)) =$$
$$= e^{x_1+x_2} \cdot (\cos(y_1 + y_2) + i\sin(y_1 + y_2)) = e^{x_1+x_2+i(y_1+y_2)} = e^{z_1+z_2}.$$

Аналогично можно убедиться в справедливости свойств: $e^{z_1} : e^{z_2} = e^{z_1-z_2}$, $(e^z)^n = e^{nz}$ $(n \in \mathbb{N})$.

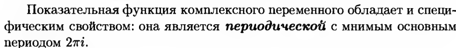
Учитывая, что $|e^z| = e^x$, а $e^x \neq 0$, утверждаем, что показательная функция e^z нигде в нуль не обращается, т. е. $e^z \neq 0$.

Исходя из определения (28.1), легко убедиться, что

$$\lim_{\substack{\operatorname{Re} z\to-\infty \\ (x\to-\infty)}} e^z = 0, \qquad \lim_{\substack{\operatorname{Re} z\to+\infty \\ (x\to+\infty)}} e^z = \infty,$$

выражение e^z при $z \to \infty$ не имеет смысла.

Положив в равенстве (28.1) $x = 0$, $y = \varphi$, получим классическую формулу Эйлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$. С ее помощью, в частности, можно представить тригонометрическую форму комплексного числа $z = r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ в более компактной форме $z = r\cdot e^{i\varphi} (= |z|\cdot e^{i\arg z})$, называемой *показательной формой* комплексного числа (см. Часть 1, п. 27.3)



Показательная функция комплексного переменного обладает и специфическим свойством: она является ***периодической*** с мнимым основным периодом $2\pi i$.



❑ Действительно,

$$e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z \cdot (\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = e^z,$$

т. е. $e^{z+2\pi i} = e^z$. Отметим, что e^z не всегда больше нуля. Например, $e^{\pi i} = -1 < 0$. ■

Логарифмическая функция



Эта функция определяется как функция, обратная показательной: число w называется ***логарифмом числа*** $z \neq 0$, если $e^w = z$, обозначается $w = \operatorname{Ln} z$. Так как значения показательной функции $e^w = z$ всегда отличны от нуля, то логарифмическая функция $w = \operatorname{Ln} z$ определена на всей

плоскости z, кроме точки $z = 0$ (стало быть, имеет смысл и выражение $\text{Ln}(-2)$).

Положив $z = r \cdot e^{i\varphi}, w = u + iv$, получим, согласно определению логарифмической функции, $e^{u+iv} = r \cdot e^{i\varphi}$, или $e^u \cdot e^{iv} = r \cdot e^{i\varphi}$. Отсюда имеем:

$$e^u = r, \ v = \varphi + 2k\pi, \text{ т. е. } u = \ln r, \ v = \varphi + 2k\pi \ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Следовательно,

$$w = \text{Ln}\, z = u + iv = \ln r + i(\varphi + 2k\pi) = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi), \qquad (28.2)$$

т. е. $\text{Ln}\, z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi)$ или, $\text{Ln}\, z = \ln|z| + i \,\text{Arg}\, z$, где $\text{Arg}\, z = \arg z + 2k\pi$.

Формула (28.2) показывает, что логарифмическая функция комплексного переменного имеет бесчисленное множество значений, т. е. $w = \text{Ln}\, z$ — многозначная функция.

Однозначную ветвь этой функции можно выделить, подставив в формулу (28.2) определенное значение k. Положив $k = 0$, получим однозначную функцию, которую называют ***главным значением*** логарифма $\text{Ln}\, z$ и обозначают символом $\ln z$:

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z, \quad \text{где } -\pi < \arg z \leqslant \pi. \qquad (28.3)$$

Если z — действительное положительное число, то $\arg z = 0$ и $\ln z = \ln|z|$, т. е. главное значение логарифма действительного положительного числа совпадает с обычным натуральным логарифмом этого числа.

Формулу (28.2) можно переписать так: $\text{Ln}\, z = \ln z + 2k\pi i$.

Из формулы (28.2) следует, что логарифмическая функция $w = \text{Ln}\, z$ обладает известными свойствами логарифма действительного переменного:

$$\text{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \text{Ln}\, z_1 + \text{Ln}\, z_2,$$

$$\text{Ln}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \text{Ln}\, z_1 - \text{Ln}\, z_2,$$

$$\text{Ln}\, z^n = n \cdot \text{Ln}\, z,$$

$$\text{Ln}\, \sqrt[n]{z} = \frac{1}{n} \cdot \text{Ln}\, z.$$

❑ Докажем, например, первое свойство:

$$\text{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \ln|z_1 \cdot z_2| + i\text{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \ln(|z_1| \cdot |z_2|) + i(\text{Arg} z_1 + \text{Arg} z_2) =$$
$$= (\ln|z_1| + i\text{Arg} z_1) + (\ln|z_2| + i\text{Arg} z_2) = \text{Ln}\, z_1 + \text{Ln}\, z_2. \quad ■$$

Пример 28.2. Вычислить $\text{Ln}(-1)$ и $\ln(-1)$; $\ln 2i$.

○ Решение: Для числа $z = -1$ имеем $|z| = 1, \arg z = \pi$. Следовательно, $\text{Ln}(-1) = \ln 1 + i(\pi + 2k\pi) = i\pi(2k + 1)$, $\ln(-1) = \pi i$ (формулы (28.2) и (28.3)); $\ln 2i = \ln|2i| + i\arg 2i = \ln 2 + i\frac{\pi}{2}$. ●

Степенная функция $w = z^n$

Если n — натуральное число, то степенная функция определяется равенством $w = z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$. Функция $w = z^n$ — однозначная.

Если $n = \frac{1}{q}$ $(q \in \mathbb{N})$, то в этом случае

$$w = z^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{z} = \sqrt[q]{|z|}\left(\cos\frac{\arg z + 2k\pi}{q} + i\sin\frac{\arg z + 2k\pi}{q}\right),$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots, q-1$.

Здесь функция $w = z^{\frac{1}{q}}$ есть многозначная (q-значная) функция. Однозначную ветвь этой функции можно получить, придав k определенное значение, например $k = 0$.

Если $n = \frac{p}{q}$, где p, $q \in \mathbb{N}$, то степенная функция определяется равенством

$$w = z^{\frac{p}{q}} = (z^{\frac{1}{q}})^p = \sqrt[q]{|z|^p}\left(\cos\frac{p(\arg z + 2k\pi)}{q} + i\sin\frac{p(\arg z + 2k\pi)}{q}\right).$$

Функция $w = z^{\frac{p}{q}}$ — многозначная.

Степенная функция $w = z^a$ с произвольным комплексным показателем $a = \alpha + i\beta$ определяется равенством

$$w = z^a = e^{a \operatorname{Ln} z}.$$

Функция $w = z^a$ определена для всех $z \neq 0$, является многозначной функцией. Так, $i^i = e^{i \operatorname{Ln} i} = e^{i \cdot i(\frac{\pi}{2} + 2\pi k)} = e^{-\frac{\pi}{2} - 2\pi k}$, где $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ При $k = 0$ имеем: $i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$.

Тригонометрические функции

Тригонометрические функции комплексного аргумента $z = x + iy$ определяются равенствами

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

При действительных z эти определения приводят к тригонометрическим функциям действительного переменного. Так, при $z = x$ $(y = 0)$

$$\sin z = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{1}{2i}\big(\cos x + i\sin x - (\cos x - i\sin x)\big) = \frac{1}{2i}2i\sin x = \sin x.$$

Тригонометрические функции комплексного переменного сохраняют многие свойства тригонометрических функций действительного переменного. В частности,

$$\begin{aligned}
&\sin^2 z + \cos^2 z = 1,\\
&\sin 2z = 2\sin z\cos z,\\
&\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1\cos z_2 - \sin z_1\sin z_2,\\
&\sin(z + 2\pi) = \sin z,\\
&\cos(-z) = \cos z,\\
&\sin(-z) = -\sin z,\\
&\operatorname{tg}(z + \pi) = \operatorname{tg} z,\\
&\cos z = 0 \ \text{ при } \ z = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k = 0, \pm1, \pm2, \ldots),
\end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} 2z = \frac{2 \operatorname{tg} z}{1 - \operatorname{tg}^2 z},$$

$$\sin(z + \frac{\pi}{2}) = \cos z,$$

$$\sin(z + \frac{3\pi}{2}) = -\cos z,$$

и т. д. Докажем, например, первое свойство:

$$\square \qquad \sin^2 z + \cos^2 z = \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2 = $$

$$= \frac{e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}}{-4} + \frac{e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}}{4} =$$

$$= \frac{-e^{2iz} + 2 - e^{-2iz} + e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}}{4} = \frac{4}{4} = 1. \qquad \blacksquare$$



Отметим, что тригонометрические функции $\sin z$ и $\cos z$ в комплексной плоскости z неограничены: $\lim\limits_{\operatorname{Im} z \to \pm\infty} \sin z = \infty$, $\lim\limits_{\operatorname{Im} z \to \pm\infty} \cos z = \infty$. Так, например, $\cos i = \frac{e + e^{-1}}{2} \approx 1{,}54 > 1$, $\cos 3i > 10$.

Гиперболические функции

Эти функции определяются равенствами

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

Легко заметить связь между гиперболическими и тригонометрическими функциями. Заменяя в указанных функциях z на iz, получим:

$$\operatorname{sh} iz = i \sin z, \quad \text{или} \quad \sin z = -i \operatorname{sh} iz,$$

$$\operatorname{ch} iz = \cos z$$

(а также $\operatorname{tg} iz = i \operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} iz = -i \operatorname{ctg} z$).

Пользуясь этими равенствами, можно получить ряд формул, связывающих гиперболические функции. Так, заменяя в формуле $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ тригонометрические функции гиперболическими, получим

$$(-i \operatorname{sh} iz)^2 + (\operatorname{ch} iz)^2 = 1,$$

или $-\operatorname{sh}^2 iz + \operatorname{ch}^2 iz = 1$. Так как здесь z — любое комплексное число, то iz можно заменить на z; получим формулу $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$. Приведем еще ряд формул:

$$\operatorname{ch} 2z = \operatorname{ch}^2 z + \operatorname{sh}^2 z, \qquad \operatorname{ch}(-z) = \operatorname{ch} z,$$

$$\operatorname{sh} 2z = 2 \operatorname{sh} z \operatorname{ch} z, \qquad \operatorname{sh}(-z) = -\operatorname{sh} z,$$

$$\operatorname{ch}(z_1 + z_2) = \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2, \qquad \operatorname{sh} z + \operatorname{ch} z = e^z,$$

и т. д.

Из определения гиперболических функций следует, что функции $\operatorname{sh} z$ и $\operatorname{ch} z$ периодические с периодом $2\pi i$; функции $\operatorname{th} z$ и $\operatorname{cth} z$ имеют период πi.



Число w называется ***арксинусом*** числа z, если $\sin w = z$, и обозначается $w = \operatorname{Arcsin} z$.

Используя определение синуса, имеем $z = \sin w = \dfrac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}$, или $e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0$. Отсюда $e^{iw} = iz + \sqrt{(iz)^2 + 1}$, т. е. $e^{iw} = iz + \sqrt{1 - z^2}$ (перед корнем можно не писать знак $\pm$, так как $\sqrt{1 - z^2}$ имеет два значения). Тогда $iw = \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2})$, или $w = \frac{1}{i}\operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2})$. Таким образом,

$$w = \operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2}).$$

Функция $w = \operatorname{Arcsin} z$ многозначна (бесконечнозначна). Аналогично определяются другие обратные тригонометрические функции. Можно показать, что

$$\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}),$$

$$\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{i - z}{i + z} \quad (z \neq \pm i),$$

$$\operatorname{Arcctg} z = \frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{z - i}{z + i} \quad (z \neq \pm i).$$

Функции, обратные гиперболическим, обозначаются соответственно $w = \operatorname{Arsh} z$ (*ареасинус*), $w = \operatorname{Arch} z$ (*ареакосинус*), $w = \operatorname{Arth} z$ (*ареатангенс*), $w = \operatorname{Arcth} z$ (*ареакотангенс*).

Обратные гиперболические функции имеют следующие выражения:

$$\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 + 1}), \quad \operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}),$$

$$\operatorname{Arth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + z}{1 - z}, \quad \operatorname{Arcth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{z + 1}{z - 1}.$$

Все эти функции бесконечнозначны.

28.4. Дифференцирование функции комплексного переменного. Условия Эйлера–Даламбера

Пусть однозначная функция $w = f(z)$ определена в некоторой окрестности точки z, включая и саму точку. Тогда предел

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z), \tag{28.4}$$



если он существует, называется ***производной функции*** $f(z)$ ***в точке*** z, а функция $f(z)$ называется ***дифференцируемой в точке*** z.

Подчеркнем, что в равенстве (28.4) Δz любым образом стремится к нулю, т. е. точка $z + \Delta z$ может приближаться к точке z по любому из бесконечного множества различных направлений (см. рис. 72) (в аналогичной ситуации для функции одного действительного переменного точка $x + \Delta x$ приближается к точке x лишь по двум направлениям: слева и справа).

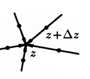


Рис. 72.

Из дифференцируемости функции $f(z)$ в некоторой точке z следует ее непрерывность в этой точке (отношение $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ при $\Delta z \to 0$ может стремиться к конечному пределу $f'(z)$ лишь при условии, что и $\Delta w \to 0$). Обратное утверждение не имеет места.

При каких условиях функция $w = f(z)$ будет дифференцируемой в данной точке?

Теорема 28.1. Если функция $w = u(x;y) + iv(x;y)$ определена в некоторой окрестности точки $z = x + iy$, причем в этой точке действительные функции $u(x;y)$ и $v(x;y)$ дифференцируемы, то для дифференцируемости функции $w = f(z)$ в точке z необходимо и достаточно, чтобы в этой точке выполнялись равенства

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{28.5}$$

Равенства (28.5) называются *условиями Эйлера–Даламбера* (или условиями *Коши–Римана*).

Рис. 73.

❑ ***Необходимость***

Пусть функция $f(z)$ дифференцируема в точке z, тогда предел (28.4) существует и не зависит от пути, по которому $\Delta z = \Delta x + i\Delta y \to 0$. Можно считать, что точка $z + \Delta z$ приближается к точке z по прямой, параллельной действительной оси (оси Ox), т. е. $\Delta z = \Delta x \to 0$, $\Delta y = 0$ (рис. 73). Тогда

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\big(u(x+\Delta x;y) + iv(x+\Delta x;y)\big) - \big(u(x;y) + iv(x;y)\big)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\big(u(x+\Delta x;y) - u(x;y)\big) + i\big(v(x+\Delta x;y) - v(x;y)\big)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x u + i\Delta_x v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x v}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Если же точка $z+\Delta z$ приближается к точке z по прямой, параллельной мнимой оси (оси Oy), то $\Delta z = i\Delta y \to 0, \Delta x = 0$. В этом случае

$$f'(z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\big(u(x;y+\Delta y) + iv(x;y+\Delta y)\big) - \big(u(x;y) + iv(x;y)\big)}{i\Delta y} =$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y u + i\Delta_y v}{i\Delta y} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Сравнив найденные пределы, получим $\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = f'(z)$. Отсюда следует: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$.

Достаточность

Пусть теперь условия (28.5) выполняются. Докажем, что функция $f(z)$ дифференцируема.

Так как функции $u(x;y)$ и $v(x;y)$ дифференцируемы в точке $z = x+iy$, то их полные приращения можно представить (см. Часть 1, (44.4)) в виде $\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \alpha_1$, $\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \alpha_2$, где α_1 и α_2 — бесконечно малые более высокого порядка, чем $|\Delta z| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$. Тогда

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\big(u(x+\Delta x; y+\Delta y) + iv(x+\Delta x; y+\Delta y)\big) - \big(u(x;y) + iv(x;y)\big)}{\Delta x + i\Delta y} =$$

$$= \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \alpha_1\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \alpha_2\right)}{\Delta x + i\Delta y} =$$

$$= \frac{\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + i\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + i\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} + \frac{\alpha_1 + i\alpha_2}{\Delta x + i\Delta y}.$$

Заменяя в числителе правой части $\frac{\partial u}{\partial y}$ на $-\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ на $\frac{\partial u}{\partial x}$, согласно условиям (28.5), получаем:

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x - \frac{\partial v}{\partial x}\Delta y + i\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + i\frac{\partial u}{\partial x}\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} + \alpha_3,$$

где

$$\alpha_3 = \frac{\alpha_1 + i\alpha_2}{\Delta x + i\Delta y},$$

т. е.

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(\Delta x + i\Delta y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(\Delta x + i\Delta y)}{\Delta x + i\Delta y} + \alpha_3 = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + \alpha_3,$$

а α_3 — бесконечно малая высшего порядка относительно $|\Delta z|$. Отсюда следует, что $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z)$ существует. При этом $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$. ■

С учетом условий Эйлера–Даламбера (28.5) производную дифференцируемой функции $f(z)$ можно находить по формулам

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}, \quad f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x},$$
$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}, \quad f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}. \qquad (28.6)$$

Правила дифференцирования функций действительного переменного справедливы и для функций комплексного переменного, дифференцируемых в точке z. Это означает, что если $f_1(z)$ и $f_2(z)$ дифференцируемы в некоторой точке z комплексной плоскости, то верно следующее:

1. $\big(f_1(z) \pm f_2(z)\big)' = f_1'(z) \pm f_2'(z)$,
2. $\big(f_1(z) \cdot f_2(z)\big)' = f_1'(z) \cdot f_2(z) + f_1(z) \cdot f_2'(z)$,
3. $\left(\frac{f_1(z)}{f_2(z)}\right)' = \frac{f_1'(z) \cdot f_2(z) - f_1(z) \cdot f_2'(z)}{f_2^2(z)} \quad (f_2(z) \neq 0)$.

4. Если $\varphi(z)$ дифференцируема в точке z, а $f(w)$ дифференцируема в точке $w = \varphi(z)$, то $\big(f(\varphi(z))\big)' = f'_\varphi(\varphi) \cdot \varphi'_z(z)$.

5. Если в некоторой точке z функция $f(z)$ дифференцируема и существует функция $f^{-1}(w)$, дифференцируемая в точке $w = f(z)$, причем $\big(f^{-1}(w)\big)' \neq 0$, то $f'(z) = \dfrac{1}{\big(f^{-1}(w)\big)'}$, где $f^{-1}(w)$ — функция, обратная функции $f(z)$.

Приведем без доказательства ***теорему о дифференцируемости основных элементарных функций комплексного переменного***: функции $w = e^z$, $w = \sin z$, $w = \cos z$, $w = \operatorname{sh} z$, $w = \operatorname{ch} z$, $w = z^n$ ($n \in \mathbb{N}$) дифференцируемы в любой точке комплексной плоскости; функции $w = \operatorname{tg} z$ и $w = \operatorname{th} z$ также дифференцируемы в любой точке плоскости, кроме точек $z = \frac{\pi}{2} + \pi k$ и $z = \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) \cdot i$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) соответственно; для функций $w = \operatorname{Ln} z, w = z^a$ в окрестности каждой точки $z \neq 0$ можно выделить однозначную ветвь, которая является дифференцируемой в точке z функцией.

28.5. Аналитическая функция. Дифференциал

Фундаментальным понятием в теории функций комплексного переменного является понятие аналитической функции.

Однозначная функция $f(z)$ называется ***аналитической*** (голоморфной) ***в точке*** z, если она дифференцируема (выполнены условия Эйлера–Даламбера) в некоторой окрестности этой точки. Функция $f(z)$ называется ***аналитической в области*** D, если она дифференцируема в каждой точке $z \in D$.

Как видно из этого определения, условие аналитичности ***в точке*** не совпадает с условием дифференцируемости функции в этой же точке (первое условие — более сильное).

Точки плоскости z, в которых однозначная функция $f(z)$ аналитична, называются ***правильными*** точками $f(z)$. Точки, в которых функция $f(z)$ не является аналитической, называются ***особыми*** точками этой функции.

Пусть функция $w = f(z)$ аналитична в точке z. Тогда $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z)$. Отсюда следует, что $\frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z) + \alpha$, где $\alpha \to 0$ при $\Delta z \to 0$. Тогда приращение функции можно записать так: $\Delta w = f'(z)\Delta z + \alpha \Delta z$. Если $f'(z) \neq 0$, то первое слагаемое $f'(z)\Delta z$ является при $\Delta z \to 0$ бесконечно малой того же порядка, что и Δz; второе слагаемое $\alpha\Delta z$ есть бесконечно малая более высокого порядка, чем Δz. Следовательно, первое слагаемое составляет главную часть приращения функции $w = f(z)$.

Дифференциалом dw аналитической функции $w = f(z)$ в точке z называется главная часть ее приращения, т. е. $dw=f'(z)\Delta z$, или $dw=f'(z)dz$ (так как при $w = z$ будет $dz=z'\Delta z=\Delta z$). Отсюда следует, что $f'(z)=\frac{dw}{dz}$,

т. е. производная функции равна отношению дифференциала функции к дифференциалу независимого переменного.

Замечание. Если функция $f(z) = u(x;y) + iv(x;y)$ аналитична в некоторой области D, то функции $u(x;y)$ и $v(x;y)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению Лапласа ($\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0$, см. п. 26.2).

❑ Действительно, дифференцируя первое из равенств Эйлера–Даламбера по y, а второе по x, получаем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x},$$

откуда $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$. ■

Функции $u(x;y)$ и $v(x;y)$ являются *гармоническими функциями.*

Пример 28.3. Проверить, является ли функция $w = z^2$ аналитической. Найти ее производную.

○ Решение: Находим действительную $\operatorname{Re} w = u$ и мнимую $\operatorname{Im} w = v$ части функции:

$$w = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy.$$

Таким образом, $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$. Проверяем условия Эйлера–Даламбера (28.5):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x;$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \quad -\frac{\partial v}{\partial x} = -2y.$$

Условия (28.5) выполняются во всех точках комплексной плоскости z. Функция $w = z^2$ дифференцируема, следовательно, аналитична во всех точках этой плоскости. Ее производную найдем по одной из формул (28.6), например по первой:

$$(z^2)' = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - y^2) + i\frac{\partial}{\partial x}(2xy) = 2x + i2y = 2(x+iy) = 2z,$$

т. е. $(z^2)' = 2z$.

Заметим, что производную функции $w = z^2$ можно найти, воспользовавшись определением производной (28.4):

$$w' = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{2z\Delta z + (\Delta z)^2}{\Delta z} =$$
$$= \lim_{\Delta z\to 0}(2z + \Delta z) = 2z. \quad ●$$

Пример 28.4. Найти аналитическую функцию $w = u+iv$ по ее заданной действительной части $u = x^3 - 3xy^2 + 2$.

○ Решение: Отметим, что функция u является гармонической функцией ($u''_{xx} = 6x$, $u''_{yy} = -6x$, следовательно, $u''_{xx} + u''_{yy} = 0$).

Для определения мнимой части v воспользуемся условиями Эйлера–Даламбера (28.5). Так как $\frac{\partial u}{\partial x} = (x^3 - 3xy^2 + 2)'_x = 3x^2 - 3y^2$, то, согласно первому условию, $\frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2$. Отсюда, интегрируя по y, находим:

$$v = \int \frac{\partial v}{\partial y}\, dy = \int (3x^2 - 3y^2)\, dy = 3x^2y - y^3 + \varphi(x).$$

Для определения функции $\varphi(x)$ воспользуемся вторым условием Эйлера–Даламбера. Так как

$$\frac{\partial u}{\partial y} = (x^3 - 3xy^2 + 2)'_y = -6xy,$$

$$\text{а } \frac{\partial v}{\partial x} = (3x^2y - y^3 + \varphi(x))'_x = 6xy + \varphi'(x),$$

то $-6xy = -(6xy + \varphi'(x))$. Отсюда $\varphi'(x) = 0$ и $\varphi(x) = C$, где $C = \text{const}$. Поэтому $v = 3x^2y - y^3 + C$. Находим функцию $w = u + iv$:

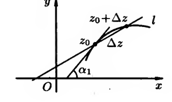
$$w = u + iv = x^3 - 3xy^2 + 2 + i(3x^2y - y^3 + C) =$$
$$= x^3 + i3x^2y - 3xy^2 - iy^3 + 2 + Ci = (x + iy)^3 + 2 + iC = z^3 + 2 + iC. \quad \bullet$$

28.6. Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Понятие о конформном отображении

Пусть функция $w = f(z)$ аналитична в точке z_0 и $f'(z_0) \neq 0$. Выясним геометрический смысл аргумента и модуля производной.

Функция $w = f(z)$ отображает точку z_0 плоскости z в точку $w_0 = f(z_0)$ плоскости w.

Пусть произвольная точка $z = z_0 + \Delta z$ из окрестности точки z_0 перемещается к точке z_0 по некоторой непрерывной кривой l. Тогда в плоскости w соответствующая точка $w = w_0 + \Delta w$ будет перемещаться к точке w_0 по некоторой кривой L, являющейся отображением кривой l в плоскости w (рис. 74).



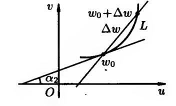


Рис. 74.

По определению производной $f'(z_0) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$. Отсюда следует, что $|f'(z_0)| = |\lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}| = \lim\limits_{\Delta z \to 0} |\frac{\Delta w}{\Delta z}| = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|}$. Величина $|\Delta z| = |z - z_0|$ представляет собой расстояние между точками z_0 и $z_0 + \Delta z$, а $|\Delta w|$ — расстояние между точками w_0 и $w_0 + \Delta w$. Следовательно, $|f'(z_0)|$ есть предел

отношения бесконечно малого расстояния между отображенными точками w_0 и $w_0+\Delta w$ к бесконечно малому расстоянию между точками z_0 и $z_0+\Delta z$. Этот предел не зависит ($f(z)$ аналитична в точке z_0) от выбора кривой l, проходящей через точку z_0. Следовательно, предел $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{|\Delta w|}{|\Delta z|}=|f'(z_0)|$ в точке z_0 постоянен, т. е. одинаков во всех направлениях.

Отсюда вытекает геометрический смысл модуля производной: величина $|f'(z_0)|$ определяет коэффициент растяжения (подобия) в точке z_0 при отображении $w=f(z)$. Величину $|f'(z_0)|$ называют ***коэффициентом растяжения***, если $|f'(z_0)|>1$, или ***коэффициентом сжатия***, если $|f'(z_0)|<1$.

Пример 28.5. Найти коэффициент растяжения (сжатия) для функции $w=\frac{1}{2}z^2$ в точке $z_0=3-4i$.

○ Решение: Функция $w=\frac{1}{2}z^2$ аналитична в точке $z_0=3-4i$, при этом $w'=z$. Следовательно, $|f'(z_0)|=|z_0|=|3-4i|=5>1$. Коэффициент растяжения для функции $w=\frac{1}{2}z^2$ в точке z_0 равен 5 (плоскость растягивается). ●

Для аргумента производной в точке z_0 имеем:

$$\arg f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\arg\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}(\arg\Delta w-\arg\Delta z)=$$
$$=\lim_{\Delta z\to 0}\arg\Delta w-\lim_{\Delta z\to 0}\arg\Delta z=\alpha_2-\alpha_1,$$

где α_1 и α_2 — углы, которые образуют касательные к кривым l и L соответственно в точках z_0, и w_0 с положительными направлениями действительных осей на плоскостях z и w (см. рис. 74).

Отсюда $\alpha_2=\alpha_1+\arg f'(z_0)$. Это означает, что $\arg f'(z_0)$ — это угол, на который нужно повернуть касательную к кривой l в точке z_0 для того, чтобы получить направление касательной к кривой L в точке w_0. Другими словами, $\arg f'(z_0)$ — это угол между отображенным и первоначальным направлениями касательных к кривым l и L в точках z_0 и w_0 соответственно. В этом состоит геометрический смысл аргумента производной $\arg f'(z_0)$.

В силу аналитичности функции $f(z)$ в точке z_0 (мы предположили, что $f(z_0)\neq 0$) угол $\arg f'(z_0)$ один и тот же для всех кривых, проходящих через точку z_0. Для другой пары кривых l_1 и L_1 в тех же точках z_0 и w_0 будем иметь $\arg f'(z_0)=\alpha_2'-\alpha_1'=\varphi$. Таким образом, $\arg f'(z_0)=\alpha_2-\alpha_1=\alpha_2'-\alpha_1'$, т. е. если кривые l и l_1 образуют в точке z_0 на плоскости z угол $\varphi=\arg f'(z_0)$, то такой же угол $\varphi=\arg f'(z_0)$ будут образовывать в точке w_0 кривые L и L_1, являющиеся отображениями кривых l и l_1 на плоскости w (см. рис. 75).

Это свойство отображения $w=f(z)$ называется *свойством сохранения (консерватизма) углов* в точке z_0.

Отображение $w=f(z)$, обладающее свойством сохранения углов и постоянством растяжений в точке z_0, называется ***конформным*** (т. е. ото-

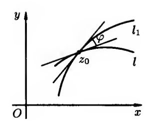


Рис. 75.

бражением, сохраняющим форму). Если при этом сохраняется и направление отсчета углов, то такое отображение называется ***конформным отображением* 1-го рода**; если направление отсчета углов изменяется на противоположное — ***конформным отображением* 2-го рода**.



Таким образом, если функция $f(z)$ является аналитической в некоторой точке z_0 комплексной плоскости z и в этой точке ее производная отлична от нуля, то отображение $w = f(z)$ конформно в этой точке.

Отображение $w = f(z)$ называется конформным в области D, если оно конформно в каждой точке этой области.



Справедливо следующее утверждение: если функция $w = f(z)$ аналитична в области D, причем во всех точках области $f'(z) \neq 0$, то отображение конформно в D; если отображение $w = f(z)$ конформно в области D, то функция $w = f(z)$ аналитична в D и во всех точках этой области $f'(z) \neq 0$.



Пример 28.6. Выяснить геометрическую картину отображения, осуществляемого функцией $w = 2z$.

❍ Решение: Отображение $w = 2z$ конформно во всех точках плоскости z, т. к. $w' = 2 \neq 0$.

Коэффициент растяжения в любой точке плоскости z равен 2. Так как $\arg w' = \arg 2 = 0$, то направление при отображении не меняется. Таким образом, отображение $w = 2z$ есть преобразование гомотетии с центром в нулевой точке ($w = 0$ при $z = 0$) и коэффициентом гомотетии, равным 2. ●

§ 29. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

29.1. Определение, свойства и правила вычисления интеграла

Пусть в каждой точке некоторой гладкой кривой L с началом в точке z_0 и концом в точке Z определена непрерывная функция $f(z)$.

Разобьем кривую L на n частей (элементарных дуг) в направлении от z_0 к z точками $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ (см. рис. 76).

В каждой «элементарной дуге» $\widehat{z_{k-1}z_k}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ выберем произвольную точку C_k и составим интегральную сумму $\sum\limits_{k=1}^{n} f(C_k)\Delta z_k$, где $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$.

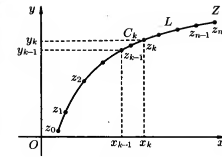


Рис. 76.

Предел такой интегральной суммы при стремлении к нулю длины наибольшей из элементарных дуг, если он существует, называется ***интегралом*** от функции $f(z)$ ***по кривой*** (***по контуру***) L и обозначается символом $\int\limits_L f(z)\,dz$.

Таким образом,

$$\boxed{\int\limits_L f(z)\,dz = \lim_{\substack{\max|\Delta z_k|\to 0\\ (n\to\infty)}} \sum_{k=1}^{n} f(C_k)\Delta z_k.} \qquad (29.1)$$

Покажем, что если L — гладкая кривая, а $f(z)$ — непрерывная и однозначная функция, то интеграл (29.1) существует.

Действительно, пусть $f(z) = u(x;y) + iv(x;y), z = x + iy, C_k = \widehat{x}_k + i\widehat{y}_k$. Тогда

$$f(C_k) = u(\widehat{x}_k;\widehat{y}_k) + iv(\widehat{x}_k;\widehat{y}_k),$$
$$\Delta z_k = (x_k + iy_k) - (x_{k-1} + iy_{k-1}) = \Delta x_k + i\Delta y_k.$$

Поэтому

$$\sum_{k=1}^{n} f(C_k)\Delta z_k = \sum_{k=1}^{n}\big(u(\widehat{x}_k;\widehat{y}_k) + iv(\widehat{x}_k;\widehat{y}_k)\big)\cdot(\Delta x_k + i\Delta y_k) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\big(u(\widehat{x}_k;\widehat{y}_k)\Delta x_k - v(\widehat{x}_k;\widehat{y}_k)\Delta y_k\big) + i\sum_{k=1}^{n}\big(v(\widehat{x}_k;\widehat{y}_k)\Delta x_k + u(\widehat{x}_k;\widehat{y}_k)\Delta y_k\big).$$

Обе суммы, находящиеся в правой части последнего равенства, являются интегральными суммами для соответствующих криволинейных интегралов (см. п. 10.1).

При сделанных предположениях о кривой L и функции $f(z)$ пределы этих сумм существуют. Поэтому после перехода к пределу (в последнем равенстве) при $\max|\Delta z_k| \to 0$ получим:

$$\boxed{\int\limits_L f(z)\,dz = \int\limits_L u\,dx - v\,dy + i\int\limits_L v\,dx + u\,dy.} \qquad (29.2)$$

Формула (29.2) показывает, что вычисление интеграла от функции комплексного переменного сводится к вычислению криволинейных интегралов от действительных функций действительных переменных.

Формулу (29.2) можно записать в удобном для запоминания виде:

$$\int\limits_L f(z)\,dz = \int\limits_L (u+iv)(dx+i\,dy). \tag{29.3}$$

Если $x = x(t), y = y(t)$, где $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ — параметрические уравнения кривой L, то $z = z(t) = x(t)+iy(t)$ называют ***комплексным параметрическим уравнением*** кривой L; формула (29.3) преобразуется в формулу

$$\int\limits_L f(z)\,dz = \int\limits_{t_1}^{t_2} f\big(z(t)\big)z'(t)\,dt. \tag{29.4}$$

❑ Действительно, считая $z(t)$ непрерывной и дифференцируемой функцией, получаем

$$\int\limits_L f(z)\,dz = \int\limits_L (u+iv)(dx+i\,dy) = \int\limits_{t_1}^{t_2} (u+iv)(x'_t+iy'_t)\,dt = \int\limits_{t_1}^{t_2} f\big(z(t)\big)z'(t)\,dt.$$ ■

Приведем основные *свойства* интеграла от функции комплексного переменного.

1. $\int\limits_L dz = z - z_0$.

❑ $\sum\limits_{k=1}^{n} \Delta z_k = \Delta z_1 + \ldots + \Delta z_n = z_1 - z_0 + z_2 - z_1 + \ldots + z_n - z_{n-1} = z - z_0$. ■

2. $\int\limits_L \big(f_1(z) \pm f_2(z)\big)\,dz = \int\limits_L f_1(z)\,dz \pm \int\limits_L f_2(z)\,dz$.

3. $\int\limits_L af(z)\,dz = a\int\limits_L f(z)\,dz$, a — комплексное число.

4. $\int\limits_L f(z)\,dz = -\int\limits_{L^-} f(z)\,dz$, т. е. при перемене направления пути интегрирования интеграл изменяет свой знак на противоположный (в других обозначениях кривой: $\int\limits_{AB} = -\int\limits_{BA}$).

5. $\int\limits_L f(z)\,dz = \int\limits_{L_1} f(z)\,dz + \int\limits_{L_2} f(z)\,dz$, где $L = L_1 + L_2$, т. е. интеграл по всему пути L равен сумме интегралов по его частям L_1 и L_2.

6. *Оценка модуля интеграла.* Если $|f(z)| \leqslant M$ во всех точках кривой L, то $\left|\int\limits_L f(z)\,dz\right| \leqslant Ml$, где l — длина кривой L.

❑ Действительно,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(C_k)\Delta z_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |f(C_k)\Delta z_k| \leqslant M \sum_{k=1}^{n} |\Delta z_k| \leqslant Ml,$$

где $\sum\limits_{k=1}^{n} |\Delta z_k|$ — длина ломаной $z_0 z_1 z_2 \ldots z_n$, вписанной в кривую L. ■

Все приведенные свойства интеграла функции комплексного переменного непосредственно вытекают из его определения (29.1) и представления (29.2).

Пример 29.1. Вычислить $I = \int\limits_L \operatorname{Im} z\, dz$, где L — полуокружность $|z| = 1$, $0 \leqslant \arg z \leqslant \pi$ (см. рис. 77).

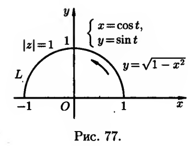


Рис. 77.

◯ Решение: Используя формулу (29.3), имеем:

$$I = \int\limits_L y(dx + i\,dy) = \int\limits_L y\,dx + i\int\limits_L y\,dy =$$

$$= \int\limits_1^{-1} \sqrt{1-x^2}\,dx + i\int\limits_1^{-1} \sqrt{1-x^2}\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

$$= \left(\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x\right)\Big|_1^{-1} - i\frac{x^2}{2}\Big|_1^{-1} = -\frac{\pi}{2}.$$

Используя формулу (29.4), имеем ($z = \cos t + i\sin t$):

$$I = \int\limits_0^{\pi} \sin t(-\sin t + i\cos t)\,dt = \int\limits_0^{\pi} -\frac{1}{2}(1-\cos 2t)\,dt + i\int\limits_0^{\pi} \sin t\cos t\,dt =$$

$$= \left(-\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Big|_0^{\pi} + i\frac{1}{2}\sin^2 t\Big|_0^{\pi} = -\frac{\pi}{2}.$$ ●

29.2. Теорема Коши. Первообразная и неопределенный интеграл. Формула Ньютона–Лейбница

Теорема 29.1 (Коши). Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D, то интеграл от этой функции по любому замкнутому контуру L, лежащему в области D, равен нулю, т. е. $\oint\limits_L f(z)dz = 0$.

❑ Докажем теорему, предполагая непрерывность производной $f'(z)$ (это упрощает доказательство). По формуле (29.2) имеем:

$$\oint\limits_L f(z)dz = \oint\limits_L u\,dx - v\,dy + i\oint\limits_L v\,dx + u\,dy.$$

В силу аналитичности $f(z) = u + iv$ и непрерывности $f'(z)$ в односвязной области D, функции $u = u(x;y)$ и $v = v(x;y)$ непрерывны и диффերен-

цируемы в этой области и удовлетворяют условиям Эйлера–Даламбера: $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial(-v)}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$. Эти условия означают равенство нулю интегралов $\oint\limits_L u\,dx - v\,dy$ и $\oint\limits_L v\,dx + u\,dy$ (см. теорему 10.3). Следовательно, $\oint\limits_L f(z)dz = 0$. ■

Теорема Коши допускает распространение на случай многосвязной области.

Рассмотрим для определенности трехсвязную область D, ограниченную внешним контуром L и внутренними контурами L_1 и L_2. Выберем положительное направление обхода контуров: при обходе область D остается слева (см. рис. 78).

Пусть функция $f(z)$ аналитична в области D и на контурах L, L_1 и L_2 (т. е. в замкнутой области $\overline{D}$; функция называется аналитической в замкнутой области $\overline{D}$, если она аналитична в некоторой области, содержащей внутри себя область D и ее границу L).

Проведя два разреза (две дуги) γ_1 и γ_2 области D (см. рис. 78), получим новую односвязную область D_1, ограниченную замкнутым ориентированным контуром Γ, состоящим из контуров L, L_1, L_2 и разрезов γ_1 и γ_2: $\Gamma = L + \gamma_1^+ + L_1 + \gamma_2^+ + L_2 + \gamma_2^- + \gamma_1^-$. По теореме Коши для односвязной области $\oint\limits_\Gamma f(z)\,dz = 0$, но

$$\int\limits_{\gamma_1^+ + \gamma_2^+ + \gamma_2^- + \gamma_1^-} = \int\limits_{\gamma_1^+} + \int\limits_{\gamma_1^-} + \int\limits_{\gamma_2^+} + \int\limits_{\gamma_2^-} = 0,$$

т. к. каждый из разрезов (дуг) γ_1 и γ_2 при интегрировании проходится дважды в противоположных направлениях. Поэтому получаем:

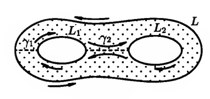


Рис. 78.

$$\int\limits_\Gamma f(z)\,dz = \oint\limits_L f(z)\,dz + \oint\limits_{L_1} f(z)\,dz + \oint\limits_{L_2} f(z)\,dz = 0,$$

т. е. интеграл от аналитической в замкнутой многосвязной области $\overline{D}$ функции $f(z)$ по границе области D, проходимой в положительном направлении, равен нулю.

Замечание. Изменив направление обхода внутренних контуров L_1 и L_2, будем иметь $\oint\limits_L f(z)\,dz = \oint\limits_{L_1} f(z)\,dz + \oint\limits_{L_2} f(z)\,dz$, где все контуры ($L$, L_1 и L_2) обходятся в одном направлении: против часовой стрелки (или по часовой стрелке). В частности, если $f(z)$ аналитична в двусвязной области, ограниченной контурами L и l и на самих этих контурах (см. рис. 79), то $\oint\limits_L f(z)\,dz = \oint\limits_l f(z)\,dz$, т. е. «интеграл от функции $f(z)$ по внешнему контуру L равен интегралу от функции $f(z)$ по внутреннему контуру l» (контуры L и l обходят в одном направлении).

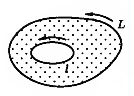


Рис. 79.

Следствие 29.1. Если $f(z)$ — аналитическая функция в односвязной области D, то интеграл от нее не зависит от формы пути интегрирования, а зависит лишь от начальной точки z_0 и конечной точки z пути интегрирования.

❑ Действительно, пусть L_1 и L_2 — две кривые в области D, соединяющие точки z_0 и z (рис. 80).

По теореме Коши $\oint\limits_{L_1+L_2^-} f(z)dz = 0$, т. е. $\int\limits_{L_1} f(z)\,dz + \int\limits_{L_2^-} f(z)\,dz = 0$, или $\int\limits_{L_1} f(z)\,dz - \int\limits_{L_2} f(z)\,dz = 0$, откуда $\int\limits_{L_1} f(z)\,dz = \int\limits_{L_2} f(z)\,dz$. ■

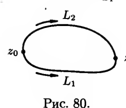


Рис. 80.

В таких случаях, когда интеграл зависит только от начальной точки и конечной точки пути интегрирования, пользуются обозначением $\int\limits_{L} f(z)\,dz = \int\limits_{z_0}^{z} f(z)\,dz$. Если здесь зафиксировать точку z_0, а точку z изменять, то $\int\limits_{z_0}^{z} f(z)\,dz$ будет функцией от z. Обозначим эту функцию через $F(z)$: $F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(z)\,dz$.

Можно доказать, что если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D, то функция $F(z)$ также аналитична в D, причем

$$F'(z) = \left(\int\limits_{z_0}^{z} f(z)\,dz\right)' = f(z).$$

Функция $F(z)$ называется ***первообразной*** для функции $f(z)$ в области D, если $F'(z) = f(z)$.

Можно показать, что если $F(z)$ есть некоторая первообразная для $f(z)$, то совокупность всех первообразных $f(z)$ определяется формулой $F(z) + C$, где $C = \text{const}$.

Совокупность всех первообразных функций $f(z)$ называется ***неопределенным интегралом*** от функции $f(z)$ и обозначается символом $\int f(z)\,dz$, т. е.

$$\boxed{\int f(z)\,dz = F(z) + C, \quad \text{где} \quad F'(z) = f(z).}$$

Пусть функция $F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(z)\,dz$ есть первообразная функция для $f(z)$. Следовательно, $\int\limits_{z_0}^{z} f(z)\,dz = F(z) + C$. Положив здесь $z = z_0$, получим $0 = F(z_0) + C$ (контур замкнется, интеграл равен нулю). Отсюда

$C = -F(z_0)$, а значит,

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz = F(z) - F(z_0).$$

Полученная формула называется *формулой Ньютона–Лейбница*.

Интегралы от элементарных функций комплексного переменного в области их аналитичности вычисляются с помощью тех же формул и методов, что и в действительном анализе.

Так, $\int e^z\,dz = e^z + C$; $\int \sin z\,dz = -\cos z + C$; $\int_0^i 3z^2\,dz = 3\cdot\frac{z^3}{3}\Big|_0^i = -i$ и т. д.

Пример 29.2. Вычислить интегралы: а) $\oint_L \frac{dz}{z-z_0}$; б) $\oint_L (z-z_0)^n dz$ $(n \neq -1)$, где L есть окружность радиуса R с центром в точке z_0, обходимая против часовой стрелки (см. рис. 81).

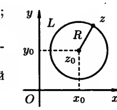


Рис. 81.

○ Решение: а) Теорема Коши неприменима, т. к. функция $\frac{1}{z-z_0}$ не аналитична в точке z_0. Параметрические уравнения окружности L есть $x = x_0 + R\cos t$, $y = y_0 + R\sin t$, где $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Следовательно,

$$z = x+iy = x_0+R\cos t+iy_0+iR\sin t = (x_0+iy_0)+R(\cos t+i\sin t) = z_0+R\cdot e^{it}.$$

Таким образом, мы получили, что комплексно-параметрическое уравнение данной окружности есть $z = z_0 + R\cdot e^{it}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Поэтому по формуле (29.4) получим:

$$\oint_L \frac{dz}{z-z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{i\cdot R\cdot e^{it}}{R\cdot e^{it}}\,dt = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

б) При $n \neq -1$ имеем:

$$\oint_L (z-z_0)^n\,dz = \int_0^{2\pi} \left(R\cdot e^{it}\right)^n R\cdot i\cdot e^{it}\,dt =$$

$$= iR^{n+1}\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t}\,dt = R^{n+1}\cdot\frac{e^{i(n+1)t}}{n+1}\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{R^{n+1}}{n+1}\left(\cos 2\pi(n+1) + i\sin 2\pi(n+1) - e^0\right) = \frac{R^{n+1}}{n+1}(1-1) = 0.$$

Итак,

$$\oint_L \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i, \quad \oint_L (z-z_0)^n dz = 0,\ n \text{ — целое, } n \neq -1.$$ ●

29.3. Интеграл Коши. Интегральная формула Коши

Теорема 29.2. Пусть функция $f(z)$ аналитична в замкнутой односвязной области $\overline{D}$ и L — граница области D. Тогда имеет место формула

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz, \qquad (29.5)$$

где $z_0 \in D$ — любая точка внутри области D, а интегрирование по контуру L производится в положительном направлении (т. е. против часовой стрелки).



Интеграл, находящийся в правой части равенства (29.5), называется ***интегралом Коши***, а сама эта формула называется ***интегральной формулой Коши***.

Формула Коши (29.5) является одной из важнейших в теории функций комплексного переменного. Она позволяет находить значения аналитической функции $f(z)$ в любой точке z_0, лежащей внутри области D через ее значения на границе этой области.

❑ Построим окружность l_r с центром в точке z_0, взяв радиус r столь малым, чтобы данная окружность была расположена внутри области (чтобы l_r не пересекала L).

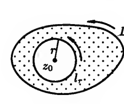


Рис. 82.

Получим двусвязную область D_1 (заштрихованную на рис. 82), ограниченную контурами L и l_r, в которой функция $\dfrac{f(z)}{z - z_0}$ аналитична.

Тогда, согласно замечанию к теореме Коши (с. 203), имеем:

$$\oint_L \frac{f(z)\, dz}{z - z_0} = \oint_{l_r} \frac{f(z)\, dz}{z - z_0}.$$

Отсюда следует:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)\, dz}{z - z_0} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{l_r} \frac{f(z)\, dz}{z - z_0} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{l_r} \frac{f(z_0) + f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\, dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} f(z_0) \oint_{l_r} \frac{dz}{z - z_0} + \frac{1}{2\pi i} \oint_{l_r} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\, dz.$$

Но $\oint_{l_r} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i$ (см. пример 29.2). Следовательно,

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)\, dz}{z - z_0} = \frac{1}{2\pi i} f(z_0) \cdot 2\pi i + \frac{1}{2\pi i} \oint_{l_r} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\, dz,$$

т. е.

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)\, dz}{z - z_0} - f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{l_r} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\, dz. \qquad (29.6)$$

Оценим разность в левой части равенства (29.6). Так как аналитическая функция $f(z)$ непрерывна в точке $z_0 \in D$, то для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $r > 0$ такое, что при $|z - z_0| \leqslant r$ (на окружности l_r имеем $|z - z_0| = r$) справедливо неравенство $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

Применяя свойство 6 об оценке модуля интеграла (п. 29.1), имеем:

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_L \frac{f(z)\,dz}{z - z_0} - f(z_0)\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{l_r} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\,dz\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\oint\limits_{l_r} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|}\,dz \leqslant \frac{1}{2\pi}\frac{\varepsilon}{r}2\pi r = \varepsilon.$$

Так как ε может быть выбран сколь угодно малым, а левая часть последнего неравенства не зависит от ε, то она равна нулю:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_L \frac{f(z)\,dz}{z - z_0} - f(z_0) = 0,$$

откуда следует формула (29.5). ■

Отметим, что интегральная формула Коши (29.5) справедлива и для многосвязной области: каждый из контуров обходится так, чтобы область D оставалась слева.

Применяя интегральную формулу Коши, можно доказать следующие теоремы-следствия.

Теорема 29.3. Для всякой дифференцируемой в точке z_0 функции $f(z)$ существуют производные всех порядков, причем n-я производная имеет вид:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint\limits_L \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\,dz. \qquad (29.7)$$

Теорема 29.4. В окрестности каждой точки z_0, где существует производная $f'(z_0)$, функция $f(z)$ может быть представлена сходящимся рядом:

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n + \ldots \qquad (29.8)$$



Таким образом, ***производная аналитической функции также является аналитической функцией.***

Напомним, что из дифференцируемости действительной функции не следует даже существования второй производной (функция $y = \sqrt[3]{x}$ имеет производную в точке $x = 0$, а производная этой функции $\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ при $x = 0$ не существует).



Ряд (29.8) называется ***рядом Тейлора*** функции $f(z)$ в точке z_0.

Ряд Тейлора дифференцируемой в точке z_0 функции существует и сходится к самой функции. Ряд же Тейлора для действительной функции $f(x)$ может сходиться к другой функции или быть расходящимся.

Замечание. Формула n-й производной функции $f(z)$ может быть получена из формулы Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_L \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi \tag{29.9}$$

(в формуле (29.5) заменено z на ξ, z_0 на z) путем последовательного дифференцирования равенства (29.9) по z:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint\limits_L \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}\, d\xi. \tag{29.10}$$

Формулы (29.5) и (29.7) можно использовать для вычисления интегралов по замкнутым контурам.

Пример 29.3. Вычислить $\oint\limits_L \frac{dz}{z^2+4}$, где а) L — окружность $|z| = 1$, б) L — окружность $|z - i| = 2$.

○ Решение: а) функция $f(z) = \frac{1}{z^2+4}$ является аналитической в области $|z| \leqslant 1$. В силу теоремы Коши имеем $\oint \frac{dz}{z^2+4} = 0$.

б) На рисунке 83 представлена область, ограниченная контуром интегрирования.

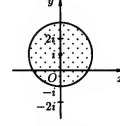


Рис. 83.

В этой области $|z - i| \leqslant 2$ находится точка $z = 2i$, в которой знаменатель подынтегральной функции равен нулю. Перепишем интеграл в виде $\oint\limits_L \frac{dz}{z^2+4} = \oint\limits_L \frac{\frac{1}{z+2i}}{z-2i}\, dz$.

Функция $f(z) = \frac{1}{z+2i}$ является аналитической в данной области. Применяя интегральную формулу Коши (29.5), находим:

$$\oint\limits_L \frac{dz}{z^2+4} = 2\pi i \left(\frac{1}{z+2i}\right)\Big|_{z=2i} = 2\pi i \frac{1}{4i} = \frac{\pi}{2}.$$ ●



Пример 29.4. Вычислить $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3}\, dz$.

○ Решение: Внутри круга и на его границе $|z| = 1$ функция $f(z) = \cos z$ аналитична. Поэтому, в силу формулы (29.7), имеем

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3}\, dz = \oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos z}{(z-0)^{2+1}}\, dz = \frac{2\pi i}{2!} (\cos z)''\Big|_{z=0} = \pi i(-\cos z)\Big|_{z=0} = -\pi i.$$

●

§ 30. РЯДЫ В КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

30.1. Числовые ряды

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots, \tag{30.1}$$

членами которого являются комплексные числа, называется ***числовым рядом*** (в комплексной области). Ряд (30.1) с комплексными членами $u_n = a_n + ib_n$ можно записать в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + ib_n) = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) + \ldots + (a_n + ib_n) + \ldots,$$

где a_n и b_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ — действительные числа.

Сумма $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k = \sum\limits_{k=1}^{n} (a_k + ib_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k + i \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$ первых n членов ряда (30.1) называется n-й *частичной суммой ряда.*

Если существует конечный предел S последовательности частичных сумм S_n ряда: $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k + i \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$, то ряд (30.1) называется *сходящимся*, а S — суммой ряда; если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует, то ряд (30.1) называется *расходящимся.*

Очевидно, что ряд (30.1) сходится тогда и только тогда, когда сходится каждый из рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{30.2}$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots \tag{30.3}$$

При этом $S = S_1 + iS_2$, где S_1 — сумма ряда (30.2), а S_2 — сумма ряда (30.3). Это означает, что исследование сходимости ряда с комплексными членами сводится к исследованию сходимости рядов (30.2) и (30.3) с действительными членами.

В теории рядов с комплексными членами основные определения, многие теоремы и их доказательства аналогичны соответствующим определениям и теоремам из теории рядов с действительными членами.

Приведем некоторые из них.

Остатком ряда (30.1) называется разность

$$r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k + i \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k.$$

Теорема 30.1 (необходимый признак сходимости ряда). Если ряд (30.1) сходится, то его общий член u_n при $n \to \infty$ стремится к нулю: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Ряд (30.1) называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = |u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots \qquad (30.4)$$

Теорема 30.2. Если сходится ряд (30.4), то абсолютно сходится ряд (30.1).



☐ По условию ряд с общим членом $|u_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ сходится. Тогда в силу очевидных неравенств $|a_n| \leqslant \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ и $|b_n| \leqslant \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ и на основании признака сравнения (теорема 14.1) сходятся ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$. Отсюда следует сходимость рядов (30.2) и (30.3), а значит, и абсолютная сходимость ряда (30.1). ■



Если ряд абсолютно сходится и имеет сумму S, то ряд, полученный из него перестановкой членов, также сходится и имеет ту же сумму S, что и исходный ряд.

Абсолютно сходящиеся ряды можно почленно складывать и перемножать.



При исследовании на сходимость рядов с комплексными членами применимы все известные из действительного анализа признаки сходимости знакопостоянных рядов, в частности признак Даламбера: если существует $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = l$, то при $l < 1$ ряд (30.4) абсолютно сходится, а при $l > 1$ — расходится.

30.2. Степенные ряды

Степенным рядом в комплексной области называют ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots, \qquad (30.5)$$

где c_n — комплексные числа (*коэффициенты ряда*), $z = x + iy$ — комплексная переменная.

Рассматривают также и степенной ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \qquad (30.6)$$

который называют рядом по степеням разности $z - z_0$, z_0 — комплексное число. Подстановкой $z - z_0 = t$ ряд (30.6) сводится к ряду (30.5).

Ряд (30.5) при одних значениях аргумента z может сходиться, при других — расходиться.



Совокупность всех значений z, при которых ряд (30.5) сходится, называется ***областью сходимости*** этого ряда.

Основной теоремой теории степенных рядов является теорема Абеля, устанавливающая область сходимости степенного ряда.

Теорема 30.3 (Абель). Если степенной ряд (30.5) сходится при $z = z_0 \neq 0$ (в точке z_0), то он абсолютно сходится при всех значениях z, удовлетворяющих условию $|z| < |z_0|$.

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы Абеля в действительном анализе (теорема 17.1).

Следствие 30.1. Если ряд (30.5) расходится при $z = z_0$, то он расходится при всех значениях z, удовлетворяющих условию $|z| > |z_0|$ (т. е. вне круга радиуса $|z_0|$ с центром в начале координат).

Из теоремы Абеля следует существование числа $R = |z_0|$ такого, что при всех значениях z, удовлетворяющих неравенству $|z| < R$, степенной ряд (30.5) абсолютно сходится. Неравенству $|z| < R$ удовлетворяют точки комплексной области, лежащие внутри круга радиуса R с центром в точке $z = 0$.

Величина R называется ***радиусом сходимости*** ряда (30.5), а круг $|z_0| < R$ — ***кругом сходимости*** ряда. В круге $|z_0| < R$ ряд (30.5) сходится, вне этого круга — расходится; на окружности $|z_0| = R$ могут располагаться как точки сходимости, так и точки расходимости ряда.

Принято считать, что $R = 0$, когда ряд (30.5) сходится в одной точке $z = 0$; $R = \infty$, когда ряд сходится на всей комплексной плоскости. Кругом сходимости ряда (30.6) является круг $|z - z_0| < R$ с центром в точке $z = z_0$.

Радиус сходимости ряда (30.5) можно вычислить по формуле $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$ (или $R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$), получаемой после применения признака Даламбера (или Коши) к ряду из модулей его членов исходного ряда.

Приведем (без доказательств) некоторые *свойства* степенного ряда.

1. Сумма степенного ряда внутри круга его сходимости есть аналитическая функция.

2. Степенной ряд внутри круга сходимости можно почленно дифференцировать и почленно интегрировать любое число раз. Полученный при этом ряд имеет тот же радиус сходимости, что и исходный ряд.

Пример 30.1. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

Решение: Здесь $c_n = \frac{1}{n!}$, $c_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$,

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty,$$

т. е. $R = \infty$. Следовательно, областью сходимости является вся плоскость z.



Пример 30.2. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(z-i)^n}{(n+1)2^n}$.

Решение: Здесь $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left| \dfrac{2^{n+1}(n+2)}{(n+1)2^n} \right| = 2$. Данный ряд сходится в области $|z-i| < 2$. ●



Пример 30.3. Определить радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{z^{2n}}{\sqrt{n}}$ и исследовать сходимость ряда в точках $z_1 = 0$, $z_2 = i$, $z_3 = 3 - 2i$.

Решение: Воспользуемся признаком Даламбера. Здесь

$$|u_n| = \frac{|z^{2n}|}{\sqrt{n}}, \quad |u_{n+1}| = \frac{|z^{2n+2}|}{\sqrt{n+1}}, \quad \lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|z^{2n+2}|\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}|z^{2n}|} = |z|^2.$$

Ряд сходится при всех z, удовлетворяющих неравенству $|z|^2 < 1$, т. е. $|z| < 1$. Кругом сходимости является круг с центром в точке $z = 0$ и радиусом 1.

Точка $z_1 = 0$ лежит внутри круга сходимости, в этой точке ряд сходится абсолютно. Точка $z_2 = i$ лежит на границе круга сходимости, в этой точке ряд может сходиться (абсолютно или условно) и расходиться. Подставляя значение $z_2 = i$ в выражение общего члена ряда, получим $(-1)^{n+1} \dfrac{(i)^{2n}}{\sqrt{n}} = \dfrac{(-1)^{n+1}(-1)^n}{\sqrt{n}} = \dfrac{(-1)^{2n+1}}{\sqrt{n}} = -\dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Числовой ряд с общим членом $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ расходится согласно интегральному признаку Коши (теорема 14.5). Следовательно, в точке $z_2 = i$ степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{z^{2n}}{\sqrt{n}}$ расходится.

Точка $z_3 = 3 - 2i$ лежит вне круга сходимости, ряд в этой точке расходится. ●

30.3. Ряд Тейлора

Теорема 30.4. Всякая аналитическая в круге $|z - z_0| < R$ функция $f(z)$ может быть единственным образом разложена в этом круге в степенной ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \tag{30.7}$$

коэффициенты которого определяются формулами

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{l_r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\, d\xi \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots), \tag{30.8}$$

где l_r — произвольная окружность с центром в точке z_0, лежащая внутри круга.

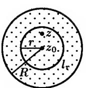


Рис. 84.

Степенной ряд (30.7) называется *рядом Тейлора* для функции $f(z)$ в рассматриваемом круге.

❑ Возьмем произвольную точку z внутри данного круга и проведем окружность с центром в точке z_0 и радиусом $r < R$ так, чтобы точка z находилась внутри круга $|z - z_0| < r$ (см. рис. 84).

Так как функция $f(z)$ аналитична в круге $|z - z_0| < r$ и на его границе l_r, то ее значение в точке z можно найти по формуле Коши (29.9): $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{l_r} \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi$, где ξ — точка на окружности l_r. Имеем:

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(\xi - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{(\xi - z_0)\left(1 - \frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right)} = \frac{\frac{1}{\xi-z_0}}{1 - \frac{z-z_0}{\xi-z_0}}.$$

Так как $|z - z_0| < |\xi - z_0|$, то $\left|\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right| < 1$, следовательно, выражение $\frac{\frac{1}{\xi-z_0}}{1 - \frac{z-z_0}{\xi-z_0}}$ можно рассматривать как сумму членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом $\frac{1}{\xi - z_0}$ и знаменателем $\frac{z - z_0}{\xi - z_0}$. Таким образом,

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0} + \frac{z - z_0}{(\xi - z_0)^2} + \frac{(z - z_0)^2}{(\xi - z_0)^3} + \ldots + \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}} + \ldots$$

Умножим обе части этого равенства на величину $\frac{1}{2\pi i}f(\xi)$ и проинтегрируем его почленно по контуру l_r. Получим:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{l_r}\frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{l_r}\frac{f(\xi)}{\xi - z_0}d\xi + (z - z_0)\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{l_r}\frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^2}d\xi +$$

$$+ (z - z_0)^2\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{l_r}\frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^3}d\xi + \ldots + (z - z_0)^n\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{l_r}\frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}d\xi + \ldots,$$

т. е. $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(z - z_0)^n\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{l_r}\frac{f(\xi)\,d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}}$, или $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z - z_0)^n$, где $c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{l_r}\frac{f(\xi)\,d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Используя формулу (29.10), получим представление коэффициентов ряда через n-е производные функции $f(z)$ в точке z_0: $c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

Таким образом, мы получили разложение функции $f(z)$ в степенной ряд (30.7), коэффициенты которого определяются по формулам (30.8).

Докажем единственность этого разложения.

Допустим, что функция $f(z)$ в круге $|z - z_0| < R$ представлена другим степенным рядом

$$f(z) = b_0 + b_1(z - z_0) + b_2(z - z_0)^2 + \ldots + b_n(z - z_0)^n + \ldots$$

Последовательно дифференцируя почленно этот ряд бесконечное число раз, будем иметь:

$$f'(z) = b_1 + 2b_2(z-z_0) + 3b_3(z-z_0)^2 + \ldots + nb_n(z-z_0)^{n-1} + \ldots,$$
$$f''(z) = 2b_2 + 3\cdot 2b_3(z-z_0) + \ldots + n(n-1)b_n(z-z_0)^{n-2} + \ldots,$$
$$f'''(z) = 3\cdot 2b_3 + \ldots + n(n-1)(n-2)b_n(z-z_0)^{n-3} + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$f^{(n)}(z) = n!\cdot b_n + (n+1)!\cdot b_{n+1}\cdot(z-z_0) + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Полагая в этих равенствах, а также в исходном ряде $z = z_0$, получаем: $b_0 = f(z_0)$, $b_1 = f'(z_0)$, $b_2 = \frac{f''(z_0)}{2!}, \ldots, b_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \ldots$ Сравнивая найденные коэффициенты b_n ряда с коэффициентами ряда (30.7), устанавливаем, что $b_n = c_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, а это означает, что указанные ряды совпадают.

Функция $f(z)$ разлагается в степенной ряд единственным образом. ■

Приведем разложения некоторых элементарных функций в ряд Тейлора (Маклорена):

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots,$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots,$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots,$$

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots,$$

$$(1+z)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}z^3 + \ldots$$

Первые три разложения справедливы во всех точках комплексной плоскости, последние два — в круге $|z| < 1$.

Заменив z на iz в разложении функции e^z, получим:

$$e^{iz} = 1 + \frac{iz}{1!} + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \cdots =$$
$$= \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots\right) + i\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots\right),$$

т. е. формулу Эйлера $e^{iz} = \cos z + i \sin z$.

30.4. Нули аналитической функции

Как показано выше, всякая функция $f(z)$, аналитическая в окрестности точки z_0, разлагается в этой окрестности в степенной ряд (30.7): коэффициенты которого определяются по формулам (30.8).



Точка z_0 называется ***нулем функции*** $f(z)$, если $f(z_0) = 0$. В этом случае разложение функции $f(z)$ в окрестности точки z_0 в степенной ряд не содержит нулевого члена, т. к. $c_0 = f(z_0) = 0$. Если не только $c_0 = 0$, но и $c_1 = c_2 = \ldots = c_{m-1} = 0$, а $c_m \neq 0$, то разложение функции $f(z)$ в окрестности точки z_0 имеет вид

$$f(z) = c_m(z - z_0)^m + c_{m+1}(z - z_0)^{m+1} + \ldots + c_n(z - z_0)^n + \ldots, \qquad (30.9)$$

а точка z_0 называется *нулем кратности* m (или нулем m-го порядка). Если $m = 1$, то z_0 называется *простым нулем.*

Из формул (30.8) для коэффициентов ряда Тейлора следует, что если z_0 является нулем кратности m функции $f(z)$, то $f(z_0) = f'(z_0) = \ldots$ $\ldots = f^{(m-1)}(z_0) = 0$, но $f^{(m)}(z_0) \neq 0$. В этом случае представление функции степенным рядом (30.9) можно переписать в виде $f(z) = (z - z_0)^m \varphi(z)$, где

$$\varphi(z) = c_m + c_{m+1}(z - z_0) + \ldots \qquad (30.10)$$

Для функции $\varphi(z)$ точка $z = z_0$ уже не является нулем, так как $\varphi(z_0) = c_m \neq 0$.

Справедливо и обратное утверждение: если функция $f(z)$ имеет вид (30.10), где m — натуральное число, а $\varphi(z)$ аналитична в точке z_0, причем $\varphi(z_0) \neq 0$, то точка z_0 есть нуль кратности m функции $f(z)$.

30.5. Ряд Лорана

Теорема 30.5. Всякая аналитическая в кольце $r < |z - z_0| < R$ $(0 \leqslant r < R \leqslant \infty)$ функция $f(z)$ может быть разложена в этом кольце в ряд

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z - z_0)^n, \qquad (30.11)$$

коэффициенты которого определяются формулой

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\, d\xi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \qquad (30.12)$$

где L — произвольная окружность с центром в точке z_0, лежащая внутри данного кольца.

Ряд (30.11) называется *рядом Лорана* для функции $f(z)$ в рассматриваемом кольце.

❑ Возьмем произвольную точку z внутри кольца $r < |z - z_0| < R$ и проведем две окружности L_1 и L_2 с центрами в точке z_0 так, чтобы точка z была между ними и каждая окружность находилась внутри данного кольца (см. рис. 85).

Функция $f(z)$ аналитична в кольце между окружностями L_1 и L_2 и на самих окружностях. Поэтому по формуле Коши для многосвязной области

имеем:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{L_1+L_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{L_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{L_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi, \qquad (30.13)$$

где обе окружности L_1 и L_2 обходятся против часовой стрелки.

Рис. 85.

Преобразуем слагаемые, стоящие в правой части равенства (30.13), рассуждая, как и при выводе формулы Тейлора.

На окружности L_2 выполняется неравенство $|z - z_0| < |\xi - z_0|$, или $\left|\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right| < 1$. Поэтому дробь $\frac{1}{\xi - z}$ можно представить в виде

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(\xi - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{(\xi - z_0)\left(1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\xi - z_0} + \frac{z - z_0}{(\xi - z_0)^2} + \ldots + \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}} + \ldots$$

Тогда

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{f(\xi)}{\xi - z} = \frac{1}{2\pi i} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} + \frac{1}{2\pi i}(z - z_0) \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^2} + \ldots + \frac{1}{2\pi i}(z - z_0)^n \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} + \ldots$$

Проинтегрируем это равенство по контуру L_2:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{L_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{L_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi +$$

$$+ (z - z_0) \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{L_2} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^2} d\xi + \ldots + (z - z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{L_2} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi + \ldots, \qquad (30.14)$$

т. е. $\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{L_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{L_2} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

(здесь $c_n \neq \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, так как функция $f(z)$, возможно, не аналитична в точке z_0).

На окружности L_1 имеем $|\xi - z_0| < |z - z_0|$, т. е. $\left|\frac{\xi - z_0}{z - z_0}\right| < 1$. Тогда

$$\frac{1}{\xi - z} = -\frac{1}{z - \xi} = -\frac{1}{(z - z_0) - (\xi - z_0)} = -\frac{1}{(z - z_0)\left(1 - \frac{\xi - z_0}{z - z_0}\right)} =$$

$$= -\left(\frac{1}{z - z_0} + \frac{\xi - z_0}{(z - z_0)^2} + \ldots + \frac{(\xi - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}} + \ldots\right).$$

Значит,

$$-\frac{1}{2\pi i} \frac{f(\xi)}{\xi - z} = \frac{1}{2\pi i} \frac{f(\xi)}{(z - z_0)} + \frac{1}{2\pi i} \frac{\xi - z_0}{(z - z_0)^2} f(\xi) + \ldots + \frac{1}{2\pi i} \frac{(\xi - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}} f(\xi) + \ldots$$

Проинтегрируем это равенство почленно по контуру L_1:

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_{L_1}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi =$$

$$= (z-z_0)^{-1}\frac{1}{2\pi i}\oint_{L_1} f(\xi)\,d\xi + (z-z_0)^{-2}\frac{1}{2\pi i}\oint_{L_1} f(\xi)(\xi-z_0)\,d\xi + \ldots$$

$$\ldots + (z-z_0)^{-(n+1)}\frac{1}{2\pi i}\oint_{L_1} f(\xi)(\xi-z_0)^n\,d\xi + \ldots =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(z-z_0)^{-n}\frac{1}{2\pi i}\oint_{L_1} f(\xi)(\xi-z_0)^{n-1}d\xi, \quad (30.15)$$

т. е. $-\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L_1}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n}$, где

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{L_1}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{-n+1}}d\xi \quad (n=1,2,3,\ldots).$$

Подставив разложения (30.14) и (30.15) в равенство (30.13), получим

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n.$$

Формулы для коэффициентов c_n и c_{-n} можно объединить, взяв вместо контура L_1 и L_2 любую окружность L с центром в точке z_0, лежащую в кольце между L_1 и L_2 (следует из теоремы Коши для многосвязной области): $c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi$ $(n=0,\pm1,\pm2,\ldots)$. ■

Можно доказать, что функция $f(z)$, аналитическая в данном кольце $r < |z-z_0| < R$, разлагается в ряд Лорана (30.11) единственным образом.

Ряд Лорана для функции

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$$

состоит из двух частей. Первая часть ряда Лорана, т. е. ряд

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n,$$

называется ***правильной частью ряда Лорана***; этот ряд сходится к аналитической функции $f_1(z)$ внутри круга $|z-z_0| < R$. Вторая часть ряда Лорана, т. е. ряд

$$f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n},$$

называется ***главной частью ряда Лорана***; этот ряд сходится к аналитической функции $f_2(z)$ вне круга $|z-z_0| > r$.

Внутри кольца $r < |z - z_0| < R$ ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z - z_0)^n$ сходится к аналитической функции $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$.

В частности, если функция $f(z)$ не имеет особых точек внутри круга $|z - z_0| < R$, то ее разложение в ряд Лорана обращается в ряд Тейлора.

Замечание. На практике при разложении функции в ряд Лорана используют известные разложения основных элементарных функций; дробь вида $\dfrac{1}{z - z_0}$ разлагается в ряд, являющийся рядом геометрической прогрессии; дробь вида $\dfrac{1}{(z - z_0)^k}$, где $k > 1$ — целое, разлагается в ряд, который получается из ряда геометрической прогрессии последовательным дифференцированием $(k - 1)$ раз; сложная дробь представляется в виде суммы простейших дробей.

Пример 30.4. Разложить в ряд Лорана функцию $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ в окрестности точки $z_0 = 0$.

○ Решение: Воспользуемся известным разложением

$$e^u = 1 + \frac{u}{1!} + \frac{u^2}{2!} + \ldots + \frac{u^n}{n!} + \ldots,$$

справедливым на всей комплексной плоскости. Положив $u = \dfrac{1}{z}$, получим

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{1!z} + \frac{1}{2!z^2} + \ldots + \frac{1}{n!z^n} + \ldots, \quad z \neq 0.$$ ●

Пример 30.5. Разложить в ряд Лорана функцию $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - z - 6}$ в окрестности точки $z_0 = 0$.

○ Решение: Функция имеет две особые точки: $z_1 = -2$ и $z_2 = 3$. Она аналитична в областях: а) $0 \leqslant |z| < 2$; б) $2 < |z| < 3$; в) $|z| > 3$.

Представим функцию $f(z)$ в виде $f(z) = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{z - 3} - \frac{1}{z + 2}\right)$.

а) В круге $|z| < 2$ (рис. 86) имеем:

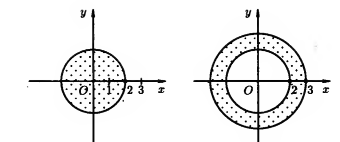
$$\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{3}\frac{1}{1 - \frac{z}{3}} = -\frac{1}{3}\left(1 + \frac{z}{3} + \frac{z^2}{3^2} + \ldots\right) \quad \left(\text{здесь } \left|\frac{z}{3}\right| < 1, \text{ т. е. } |z| < 3\right),$$

$$-\frac{1}{z+2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2^2} - \ldots\right) \quad \left(\text{здесь } \left|-\frac{z}{2}\right| < 1, \text{ т. е. } |z| < 2\right).$$

Следовательно,

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - z - 6} = -\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3^{n+1}} + (-1)^n\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n = -\frac{1}{6} + \frac{1}{36}z - \frac{7}{27 \cdot 8}z^2 + \ldots,$$

ряд Лорана функции $f(z)$ обращается в ряд Тейлора.



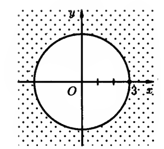


Рис. 86. Рис. 87. Рис. 88.

б) В кольце $2 < |z| < 3$ (рис. 87) имеем:

$$\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{3}\left(1 + \frac{z}{3} + \frac{z^2}{3^2} + \ldots\right) \quad (|z| < 3),$$

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1+\frac{2}{z}} = \frac{1}{z}\left(1 - \frac{2}{z} + \frac{2^2}{z^2} - \ldots\right) = +\frac{1}{z} - \frac{2}{z^2} + \frac{2^2}{z^3} - \ldots \quad (|z| > 2).$$

Следовательно,

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - z - 6} = -\frac{1}{5}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2^n}{z^{n+1}}\right).$$

в) В области $|z| > 3$ (рис. 88) имеем:

$$\frac{1}{z-3} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{3}{z}} = \frac{1}{z}\left(1 + \frac{3}{z} + \frac{3^2}{z^2} + \ldots\right) \quad (|z| > 3),$$

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{2}{z}} = \frac{1}{z}\left(1 - \frac{2}{z} + \frac{2^2}{z^2} - \ldots\right) \quad (|z| > 2).$$

Следовательно,

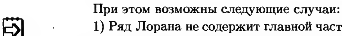
$$f(z) = \frac{1}{z^2 - z - 6} = \frac{1}{5}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2^n}{z^{n+1}}\right).$$ ●

30.6. Классификация особых точек. Связь между нулем и полюсом функции

Как уже знаем, *особой точкой* функции $f(z)$ называется точка, в которой функция не является аналитической.

Особая точка $z = z_0$ функции $f(z)$ называется ***изолированной***, если в некоторой окрестности ее функция $f(z)$ не имеет других особых точек.

Если z_0 — изолированная особая точка функции $f(z)$, то существует такое число $R > 0$, что в кольце $0 < |z - z_0| < R$ функция $f(z)$ будет аналитической и, следовательно, разлагается в ряд Лорана (30.11): $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}$.



При этом возможны следующие случаи:



1) Ряд Лорана не содержит главной части, т. е. в ряде нет членов с отрицательными показателями. В этом случае точка z_0 называется ***устранимой особой точкой*** функции $f(z)$.

2) Разложение Лорана содержит в своей главной части конечное число членов, т. е. в ряде есть конечное число членов с отрицательными показателями. В этом случае точка z_0 называется ***полюсом*** функции $f(z)$.

3) Разложение Лорана содержит в своей главной части бесконечное множество членов, т. е. в ряде есть бесконечно много членов с отрицательными показателями. В этом случае точка z_0 называется ***существенно особой точкой*** функции $f(z)$.

Укажем особенности поведения аналитической функции $f(z)$ в окрестности особой точки каждого типа.

Устранимые особые точки

Если z_0 — устранимая особая точка, то в окрестности точки z_0 разложение (30.11) имеет вид $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$. Это разложение справедливо во всех точках круга $|z - z_0| < R$, кроме точки $z = z_0$. Если положить $f(z_0) = c_0$, где $c_0 = \lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ (т. е. определить функцию $f(z)$ в точке z_0), то функция $f(z)$ станет аналитической во всем круге $|z - z_0| < R$ (включая его центр $z = z_0$); особенность точки z_0 устраняется, точка z_0 становится правильной точкой функции $f(z)$).

Из равенства $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = c_0$ $(c_0 \neq \infty)$ следует, что в достаточно малой окрестности устраняемой особой точки z_0 функция $f(z)$ является ограниченной.



Справедливо и обратное утверждение: ***изолированная особая точка $z = z_0$ является устранимой, если существует конечный предел $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = A$.***

Полюсы

Если z_0 — полюс, то в окрестности точки z_0 разложение (30.11) имеет вид $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + \frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2} + \ldots + \frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m}$, где $c_{-m} \neq 0$. В этом случае полюс z_0 называется *полюсом m-го порядка* функции $f(z)$; если $m = 1$, то полюс z_0 называется *простым*.

Запишем последнее равенство в виде

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^m}\Big((z-z_0)^m \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n + c_{-1}(z-z_0)^{m-1} + \\ + c_{-2}(z-z_0)^{m-2} + \ldots + c_{-m}\Big)$$

или

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m}, \tag{30.16}$$

где $g(z)$ — аналитическая функция, причем $g(z_0) = c_{-m} \neq 0$. Отсюда следует, что $f(z) \to \infty$ при $z \to z_0$, т. е. в достаточно малой окрестности полюса функция $f(z)$ бесконечно велика.



Справедливо и обратное утверждение: ***изолированная особая точка $z = z_0$ является полюсом, если*** $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$.

Из равенства (30.16) имеем $(z - z_0)^m f(z) = g(z)$. Отсюда получаем удобный способ определения порядка полюса z_0: если

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z) = c_{-m} \quad (c_{-m} \neq 0,\ c_{-m} \neq \infty), \tag{30.17}$$



то точка z_0 есть полюс m-го порядка.

Имеется связь между нулем и полюсом функции.

Теорема 30.6. Если точка z_0 — нуль m-го порядка функции $f(z)$, то z_0 является полюсом m-го порядка функции $\frac{1}{f(z)}$; если точка z_0 — полюс m-го порядка функции $f(z)$, то z_0 является нулем m-го порядка функции $\frac{1}{f(z)}$.

❑ Докажем первую часть теоремы. Пусть $z = z_0$ есть нуль m-го порядка для функции $f(z)$. Тогда имеет место равенство $f(z) = (z - z_0)^m \varphi(z)$, где $\varphi(z)$ аналитична в точке z_0, причем $\varphi(z_0) \neq 0$. Тогда $(z - z_0)^m \frac{1}{f(z)} = \frac{1}{\varphi(z)}$ и $\lim\limits_{z \to z_0} \left((z - z_0)^m \frac{1}{f(z)} \right) = \frac{1}{\varphi(z_0)} \neq 0$ $(\neq \infty)$. Это означает (см. (30.17)), что для функции $\frac{1}{f(z)}$ точка $z = z_0$ является полюсом m-го порядка. Вторая часть теоремы (обратной) доказывается аналогично. ■

Существенно особая точка

Если z_0 — существенно особая точка, то, как доказывается (теорема Сохоцкого–Вейерштрасса), в достаточно малой окрестности точки z_0 функция $f(z)$ становится неопределенной. В такой точке аналитическая функция не имеет ни конечного, ни бесконечного предела. Выбирая различные последовательности точек $\{z_n\}$, сходящихся к существенно особой точке z_0, можно получать различные последовательности соответствующих значений функций, сходящиеся к различным пределам.



Пример 30.6. Определить тип особенности функции $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ в точке $z = 0$.

○ Решение: Функция $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ в окрестности точки $z = 0$ имеет следующее лорановское разложение: $e^{\frac{1}{z}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n}$ (см. пример 30.4). Точка $z = 0$ является существенно особой точкой. Если $z \to 0$ вдоль положительной части действительной оси, то $\lim\limits_{z \to 0} e^{\frac{1}{z}} = \lim\limits_{x \to 0+0} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$; если $z \to 0$ вдоль отрицательной части действительной оси, то $\lim\limits_{z \to 0} e^{\frac{1}{z}} = \lim\limits_{x \to 0-0} e^{\frac{1}{x}} = 0$. ●

Замечание. Классификацию изолированных особых точек можно распространить на случай, когда особой точкой функции $f(z)$ является бесконечно удаленная точка, $z = \infty$.

Окрестностью точки $z = \infty$ называют внешность какого-либо круга с центром в точке $z = 0$ и достаточно большим радиусом R (чем больше R, тем меньше окрестность точки $z = \infty$).

Точку $z = \infty$ называют изолированной особой точкой, если в некоторой окрестности ее нет других особых точек функции $f(z)$.

Бесконечно удаленная изолированная особая точка может оказаться устранимой особой точкой, полюсом порядка m или существенно особой точкой. В первом случае лорановское разложение функции $f(z)$ в окрестности точки $z = \infty$ не имеет членов с положительными показателями, во втором — имеет их лишь конечное число, в третьем случае в разложении имеется бесконечно много членов с положительными показателями.

Изучение функции $f(z)$ в окрестности точки $z = \infty$ можно свести путем подстановки $z = \frac{1}{w}$ к изучению функции $f\left(\frac{1}{w}\right)$ в окрестности точки $z = 0$.

Пример 30.7. Найти особые точки функции $f(z) = \frac{\sin z}{z^4}$.

○ Решение: Особой точкой функции $f(z)$ является $z = 0$. Найдем предел функции при $z \to 0$: $\lim\limits_{z\to 0} \frac{\sin z}{z^4} = \lim\limits_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} \frac{1}{z^3} = \infty$. Следовательно, точка $z = 0$ является полюсом. Можно убедиться, что $\lim\limits_{z\to 0} z^2 \frac{\sin z}{z^4} = \infty$, $\lim\limits_{z\to 0} z^3 \frac{\sin z}{z^4} = 1 \neq 0$. Следовательно (см. (30.17)), точка $z = 0$ — полюс третьего порядка. ●

Пример 30.8. Исследовать особенности функции $f(z) = \frac{z+3}{z(z+2)(z-1)^2}$.

○ Решение: Для данной функции точки $z_1 = 0$ и $z_2 = -2$ — простые полюсы, $z_3 = 1$ — полюс второго порядка. ●

Пример 30.9. Выяснить поведение функций $f(z) = \frac{1}{z-3}$, $g(z) = \frac{z^2}{1+z^2}$ в окрестности точки $z = \infty$.

○ Решение: Сделаем подстановку $z = \frac{1}{w}$. Тогда функция $f(z) = \frac{1}{z-3}$ примет вид $f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{w}{1-3w}$. При условии $|3w| < 1$ имеет место разложение $f\left(\frac{1}{w}\right) = w\big(1 + 3w + (3w)^2 + \ldots\big)$. Возвращаясь к старой переменной, имеем

$$f(z) = \frac{1}{z-3} = \frac{1}{z}\left(1 + \frac{3}{z} + \frac{3^2}{z^2} + \ldots\right) = \frac{1}{z} + \frac{3}{z^2} + \frac{3^2}{z^3} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{z^{n+1}}, \quad |z| > 3.$$

Поэтому точка $z = \infty$ является устранимой особой точкой (см. последнее замечание).

Можно убедиться, что $z = \infty$ для функции $g(z) = \frac{z^2}{1+z^2}$ является правильной точкой. ●

§ 31. ВЫЧЕТ ФУНКЦИИ

31.1. Понятие вычета и основная теорема о вычетах



Вычетом аналитической функции $f(z)$ в изолированной особой точке z_0 называется комплексное число, равное значению интеграла $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_L f(z)\,dz$, взятого в положительном направлении по окружности L с центром в точке z_0, лежащей в области аналитичности функции $f(z)$ (т. е. в кольце $0 < |z - z_0| < R$).

Обозначается вычет функции $f(z)$ в изолированной особой точке z_0 символом $\operatorname{Res} f(z_0)$ или $\operatorname{Res}(f(z); z_0)$. Таким образом,

$$\boxed{\operatorname{Res} f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_L f(z)\,dz.} \tag{31.1}$$

Если в формуле (30.12) положить $n = -1$, то получим

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_L f(z)\,dz \quad \text{или} \quad \operatorname{Res} f(z_0) = c_{-1},$$



т. е. вычет функции $f(z)$ относительно особой точки z_0 равен коэффициенту при первом члене с отрицательным показателем в разложении функции $f(z)$ в ряд Лорана (30.11).

Теорема 31.1 (Коши). Если функция $f(z)$ является аналитической в замкнутой области $\overline{D}$, ограниченной контуром L, за исключением конечного числа особых точек z_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$, лежащих внутри области D, то

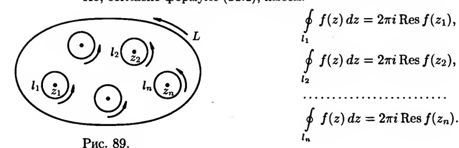
$$\oint\limits_L f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res} f(z_k). \tag{31.2}$$

❑ Вокруг каждой особой точки z_k опишем окружность l_k так, чтобы она целиком содержалась в области D, не содержала внутри других особых точек и чтобы никакие две из этих окружностей не имели общих точек (см. рис. 89).

Тогда на основании теоремы Коши для многосвязной области (см. замечание на с. 203) имеем:

$$\oint\limits_L f(z)\,dz = \oint\limits_{l_1} f(z)\,dz + \oint\limits_{l_2} f(z)\,dz + \ldots + \oint\limits_{l_n} f(z)\,dz,$$

где при интегрировании все контуры обходятся против часовой стрелки. Но, согласно формуле (31.1), имеем:



$$\oint\limits_{l_1} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res} f(z_1),$$

$$\oint\limits_{l_2} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res} f(z_2),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\oint\limits_{l_n} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res} f(z_n).$$

Рис. 89.

Следовательно,

$$\oint\limits_{L} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res} f(z_1) + \ldots + 2\pi i \operatorname{Res} f(z_n),$$

т. е. $\oint\limits_{L} f(z)\,dz = 2\pi i \sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname{Res} f(z_k).$ ■

31.2. Вычисление вычетов. Применение вычетов в вычислении интегралов

Правильные или устранимые особые точки. Очевидно, если $z = z_0$ есть правильная или устранимая особая точка функции $f(z)$, то $\operatorname{Res} f(z_0) = 0$ (в разложении Лорана (30.11) в этих случаях отсутствует главная часть, поэтому $c_{-1} = 0$).

Полюс. Пусть точка z_0 является простым полюсом функции $f(z)$. Тогда ряд Лорана для функции $f(z)$ в окрестности точки z_0 имеет вид $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n + \frac{c_{-1}}{z-z_0}$. Отсюда

$$(z-z_0)f(z) = c_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^{n+1}.$$

Поэтому, переходя в этом равенстве к пределу при $z \to z_0$, получаем

$$\boxed{\operatorname{Res} f(z_0) = c_{-1} = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z).} \qquad (31.3)$$

Замечание. Формуле (31.3) для вычисления вычета функции $f(z)$ в простом полюсе можно придать другой вид, если функция $f(z)$ является частным двух функций, аналитических в окрестностях точки z_0.

Пусть $f(z) = \frac{\varphi(z)}{g(z)}$, где $\varphi(z_0) \neq 0$, а $g(z)$ имеет простой нуль при $z = z_0$ (т. е. $g(z_0) = 0, g'(z_0) \neq 0$). Тогда, применяя формулу (31.3), имеем: $\operatorname{Res} f(z_0) = \lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)\frac{\varphi(z)}{g(z)} = \lim\limits_{z\to z_0} \frac{\varphi(z)}{\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}} = \frac{\varphi(z_0)}{g'(z_0)}$, т. е.

$$\boxed{\operatorname{Res}\left(\frac{\varphi(z)}{g(z)}; z_0\right) = \frac{\varphi(z_0)}{g'(z_0)}.} \qquad (31.4)$$

Пусть точка z_0 является полюсом m-го порядка функции $f(z)$. Тогда лорановское разложение функции $f(z)$ в окрестности точки z_0 имеет вид $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + \frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2} + \ldots + \frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m}$. Отсюда $(z-z_0)^m f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^{n+m} + c_{-m} + c_{-m+1}(z-z_0) + \ldots + c_{-1}(z-z_0)^{m-1}$.

Дифференцируя последнее равенство $(m-1)$ раз, получим:

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left((z-z_0)^m f(z)\right) =$$

$$= (m-1)!c_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+m)(n+m-1)(n+m-2)\ldots(n+2)(z-z_0)^{n+1}.$$

Переходя здесь к пределу при $z \to z_0$, получаем

$$\boxed{\operatorname{Res} f(z_0) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left((z-z_0)^m f(z)\right).} \qquad (31.5)$$

Существенно особая точка. Если точка z_0 — существенно особая точка функции $f(z)$, то для вычисления вычета функции в этой точке обычно непосредственно определяют коэффициент c_{-1} в разложении функции в ряд Лорана.

Пример 31.1. Найти вычеты функции $f(z) = \frac{z+2}{z^3-z^4}$ в ее особых точках.

○ Решение: Особыми точками функции $f(z)$ являются: $z_1 = 1$ — простой полюс, $z_2 = 0$ — полюс третьего порядка ($m = 3$). Следовательно, по формуле (31.4) имеем $\operatorname{Res}(f(z);1) = \frac{z+2}{(z^3-z^4)'}\Big|_{z=1} = \frac{1+2}{3-4} = -3$.

Используя формулу (31.5), находим:

$$\operatorname{Res}(f(z);0) = \frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\left((z-0)^3\frac{z+2}{z^3-z^4}\right)'' = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left(\frac{z+2}{1-z}\right)'' = \frac{1}{2}\cdot 6 = 3. \ \bullet$$

Пример 31.2. Найти вычет функции $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ в особой точке $z = 0$.

○ Решение: Лорановское разложение данной функции в окрестности точки $z = 0$ было найдено в примере 30.4. Из него находим $c_{-1} = 1$, т. е. $\operatorname{Res}(f(z);0) = 1$. ●

Теорема о вычетах часто используется для вычисления интеграла от функции комплексного переменного по замкнутому контуру.

Пример 31.3. Вычислить $\oint\limits_L \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}$, где L — окружность $|z-1-i| = \sqrt{2}$.

❍ Решение: Функция $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}$ имеет в круге $|z-1-i| < \sqrt{2}$ (см. рис. 90) простой полюс $z_1 = i$ и полюс второго порядка $z_2 = 1$. Применяя формулы (31.2), (31.3) и (31.5), получаем:

$$\oint_L \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)} = 2\pi i\big(\operatorname{Res}(f(z);i) + \operatorname{Res}(f(z);1)\big) =$$

$$= 2\pi i\left[\lim_{z\to i} \frac{z-i}{(z-1)^2(z+i)(z-i)} + \frac{1}{1!}\lim_{z\to 1}\left((z-1)^2\frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}\right)'\right] =$$

$$= 2\pi i\left(\lim_{z\to i}\frac{1}{(z-1)^2(z+i)} + \lim_{z\to 1}\frac{-2z}{(z^2+1)^2}\right) = 2\pi i\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi i}{2}. \quad \bullet$$

Определенный интеграл вида $\int\limits_0^{2\pi} R(\sin x; \cos x)\,dx$ с помощью замены $z = e^{ix}$ в некоторых случаях удается преобразовать в интеграл по замкнутому контуру $|z| = 1$ от функции комплексного переменного, к которому уже применима основная теорема о вычетах.

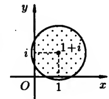


Рис. 90.

Пример 31.4. Вычислить с помощью вычетов интеграл $I = \int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{(3+2\cos x)^2}$.

❍ Решение: Произведем замену переменного, положив $z = e^{ix}$. Тогда $dz = ie^{ix}dx = iz\,dx$, $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = \frac{z+\frac{1}{z}}{2} = \frac{z^2+1}{2z}$. При изменении x от 0 до 2π точка z опишет в положительном направлении окружность $|z| = 1$. Следовательно,

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{(3+2\cos x)^2} = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{iz\left(3+2\frac{z^2+1}{2z}\right)^2} = \frac{1}{i}\oint_{|z|=1}\frac{z\,dz}{(z^2+3z+1)^2} = I.$$

В круге $|z| < 1$ функция $f(z) = \frac{z}{(z^2+3z+1)^2}$ имеет полюс второго порядка $z_1 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$. По формуле (31.5) находим

$$\operatorname{Res}\left(f(z); \frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{1!}\lim_{z\to\frac{-3+\sqrt{5}}{2}}\left(\left(z - \frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)^2 \frac{z}{\left(z-\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)^2\cdot\left(z-\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right)^2}\right)' =$$

$$= \lim_{z\to\frac{-3+\sqrt{5}}{2}} \frac{\frac{3+\sqrt{5}}{2} - z}{\left(z+\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^3} = \frac{3}{5\sqrt{5}}.$$

Следовательно, $I = \frac{1}{i}\cdot 2\pi i\cdot\frac{3}{5\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{25}\pi$. $\bullet$

Глава IX. ЭЛЕМЕНТЫ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Лекции 33–35

Операционное исчисление играет важную роль при решении прикладных задач, особенно в современной автоматике и телемеханике.

Операционное исчисление — один из методов математического анализа, позволяющий в ряде случаев сводить исследование дифференциальных и некоторых типов интегральных операторов и решение уравнений, содержащих эти операторы, к рассмотрению более простых алгебраических задач.

Методы операционного исчисления предполагают реализацию следующей условной схемы решения задачи.

1. От искомых функций переходят к некоторым другим функциям — их изображениям.

2. Над изображениями производят операции, соответствующие заданным операциям над самими функциями.

3. Получив некоторый результат при действиях над изображениями, возвращаются к самим функциям.

В качестве преобразования, позволяющего перейти от функции к их изображениям, будем применять так называемое *преобразование Лапласа.*

§ 32. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

32.1. Оригиналы и их изображения

Основными первоначальными понятиями операционного исчисления являются понятия функции-оригинала и функции-изображения.

Пусть $f(t)$ — действительная функция действительного переменного t (под t будем понимать время или координату).

Функция $f(t)$ называется ***оригиналом***, если она удовлетворяет следующим условиям:

1. $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$.

2. $f(t)$ — кусочно-непрерывная при $t \geqslant 0$, т. е. она непрерывна или имеет точки разрыва I рода, причем на каждом конечном промежутке оси t таких точек лишь конечное число.

3. Существуют такие числа $M > 0$ и $s_0 \geqslant 0$, что для всех t выполняется неравенство $|f(t)| \leqslant M \cdot e^{s_0 t}$, т. е. при возрастании t функция $f(t)$ может возрастать не быстрее некоторой показательной функции. Число s_0 называется ***показателем роста*** $f(t)$.

Условия 1–3 выполняются для большинства функций, описывающих различные физические процессы.

Первое условие означает, что процесс начинается с некоторого момента времени; удобнее считать, что в момент $t = 0$. Третьему условию удовлетворяют ограниченные функции (для них можно положить $s_0 = 0$),

степенные t^n $(n > 0)$ и другие (для функций вида $f(t) = \alpha e^{t^2}$ условие 3 не выполняется). Не является оригиналом, например, функция $f(t) = \frac{1}{t}$ (не удовлетворяет второму условию).

Замечание. Функция $f(t)$ может быть и комплексной функцией действительно переменного, т. е. иметь вид $f(t) = f_1(t) + if_2(t)$; она считается оригиналом, если действительные функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ являются оригиналами.

Изображением оригинала $f(t)$ называется функция $F(p)$ комплексного переменного $p = s + i\sigma$, определяемая интегралом

$$F(p) = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-pt} \cdot dt. \tag{32.1}$$

Операцию перехода от оригинала $f(t)$ к изображению $F(p)$ называют ***преобразованием Лапласа***. Соответствие между оригиналом $f(t)$ и изображением $F(p)$ записывается в виде $f(x) \risingdotseq F(p)$ или $F(p) \risingdotseq f(x)$ (принято оригиналы обозначать малыми буквами, а их изображения — соответствующими большими буквами).

Теорема 32.1 (существование изображения). Для всякого оригинала $f(t)$ изображение $F(p)$ существует (определено) в полуплоскости $\operatorname{Re} p = s > s_0$, где s_0 — показатель роста функции $f(t)$, причем функция $F(p)$ является аналитической в этой полуплоскости $(s > s_0)$.

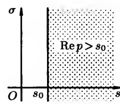


Рис. 91.

❑ Докажем первую часть теоремы. Пусть $p = s+i\sigma$ произвольная точка полуплоскости $\operatorname{Re} p = s > s_0$ (см. рис. 91). Учитывая, что $|f(t)| \leqslant M \cdot e^{s_0 t}$, находим:

$$\left|\int_0^\infty f(t) \cdot e^{-pt}\,dt\right| \leqslant \int_0^\infty |f(t) \cdot e^{-pt}|\,dt \leqslant M \int_0^\infty e^{s_0 t}|e^{-pt}|\,dt =$$

$$= M \int_0^\infty e^{s_0 t} e^{-st}\,dt = M \int_0^\infty e^{-(s-s_0)t}\,dt = \frac{M}{s - s_0},$$

так как $s - s_0 > 0$ и $|e^{-pt}| = |e^{-st} \cdot e^{-i\sigma t}| = e^{-st} \cdot |\cos\sigma t - i\sin\sigma t| = e^{-st}$. Таким образом,

$$|F(p)| = \left|\int_0^\infty f(t) \cdot e^{-pt}\,dt\right| \leqslant \frac{M}{s - s_0}. \tag{32.2}$$

Отсюда вытекает абсолютная сходимость интеграла (32.1), т. е. изображение $F(p)$ существует и однозначно в полуплоскости $\operatorname{Re} p = s > s_0$. ■

Следствие 32.1 (необходимый признак существования изображения). Если функция $F(p)$ является изображением функции $f(t)$, то

$$\lim_{p\to\infty} F(p) = 0.$$

Это утверждение непосредственно вытекает из неравенства (32.2), когда $\operatorname{Re} p = s \to +\infty$.

Так как $F(p)$ — аналитическая функция в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$, то $F(p) \to 0$ при $p \to \infty$ по любому направлению. Отсюда, в частности, следует, что функции $F(p) = 5$, $F(p) = p^2$ не могут быть изображениями.

Отметим, что из аналитичности функции $F(p)$ следует, что все ее особые точки должны лежать левее прямой $\operatorname{Re} p = s = s_0$ или на самой этой прямой. Функция $F(p)$, не удовлетворяющая этому условию, не является изображением функции $f(t)$. Не является изображением, например, функция $F(p) = \operatorname{tg} p$ (ее особые точки расположены на всей оси s).

Теорема 32.2 (о единственности оригинала). Если функция $F(p)$ служит изображением двух оригиналов $f_1(t)$ и $f_2(t)$, то эти оригиналы совпадают друг с другом во всех точках, в которых они непрерывны.

(Примем без доказательства.)

Пример 32.1. Найти изображение единичной функции Хевисайда

$$\mathbf{1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \geqslant 0, \\ 0 & \text{при } t < 0 \end{cases}$$

(см. рис. 92).

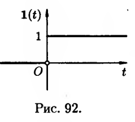


Рис. 92.

Решение: По формуле (32.1) при $s = \operatorname{Re} p > 0$ $(s_0 = 0)$ находим:

$$F(p) = \int_0^\infty 1 \cdot e^{-pt}\,dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-pt}\,dt = \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{p} \cdot e^{-pt}\Big|_0^b = \frac{1}{p},$$

т. е. $F(p) = \frac{1}{p}$, или, в символической записи, $\mathbf{1}(t) \risingdotseq \frac{1}{p}$, или $\mathbf{1} \risingdotseq \frac{1}{p}$. ●

Замечание. В дальнейшем функцию-оригинал будем кратко записывать в виде $f(t)$, подразумевая, что

$$f(t) = \begin{cases} f(t) & \text{при } t \geqslant 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

Пример 32.2. Найти изображение функции $f(t) = e^{at}$, где a — любое число.

Решение: Данная функция является оригиналом. По формуле (32.1) имеем

$$F(p) = \int_0^\infty e^{at} e^{-pt}\,dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-(p-a)t}\,dt = -\lim_{b\to\infty} \frac{1}{p-a} \cdot e^{-(p-a)t}\Big|_0^b =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(\frac{1}{p-a} - \frac{e^{-(p-a)\cdot b}}{p-a} \right) = \frac{1}{p-a},$$

если $\mathrm{Re}(p-a)>0$. Таким образом,

$$e^{at} \risingdotseq \frac{1}{p-a} \quad (\mathrm{Re}\,p > \mathrm{Re}\,a). \tag{32.3}$$

●

Пример 32.3. Найти изображение функции $f(t)=t$.

○ Решение: В этом случае преобразование Лапласа имеет вид

$$\int_0^\infty t\cdot e^{-pt}\,dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b te^{-pt}\,dt = \left[\begin{array}{l|l} u=t & du=dt \\ dv=e^{-pt}\,dt & v=-\frac{1}{p}e^{-pt}\end{array}\right] =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{t}{p}\cdot e^{-pt}\Big|_0^b - \frac{1}{p^2}e^{-pt}\Big|_0^b\right) = \frac{1}{p^2}$$

$\left(\text{т. к. } \lim_{b\to\infty}\left|\frac{1}{p}\cdot b\cdot e^{-pb}\right| = \frac{1}{\sqrt{s^2+\sigma^2}}\cdot\lim_{b\to\infty} b\cdot e^{-sb} = 0\right)$, т. е.

$$t \risingdotseq \frac{1}{p^2}. \tag{32.4}$$

●



Замечание. Функция $F(p)=\frac{1}{p-a}$ является аналитической не только в полуплоскости $\mathrm{Re}\,p > \mathrm{Re}\,a$, где интеграл (32.1) сходится, а на всей комплексной плоскости p, кроме точки $p=a$. Такая особенность наблюдается и для многих других изображений. Далее для нас будет более важным, как правило, само изображение функции, а не область, в которой оно выражается интегралом (32.1).

32.2. Свойства преобразования Лапласа

Находить изображения, пользуясь только определением изображения, не всегда просто и удобно. Свойства преобразования Лапласа существенно облегчают задачу нахождения изображений для большого числа разнообразных функций, а также задачу отыскания оригиналов по их изображениям.

Линейность

Линейной комбинации оригиналов соответствует такая же линейная комбинация изображений, т. е. если $f_1(t) \risingdotseq F_1(p)$, $f_2(t) \risingdotseq F_2(p)$, c_1 и c_2 — постоянные числа, то $c_1\cdot f_1(t) + c_2\cdot f_2(t) \risingdotseq c_1\cdot F_1(p) + c_2\cdot F_2(p)$.

❑ Используя свойства интеграла, находим

$$\int_0^\infty \big(c_1\cdot f_1(t) + c_2\cdot f_2(t)\big)\cdot e^{-pt}\,dt =$$

$$= c_1\cdot\int_0^\infty f_1(t)\cdot e^{-pt}\,dt + c_2\int_0^\infty f_2(t)\cdot e^{-pt}\,dt = c_1\cdot F_1(p) + c_2\cdot F_2(p).$$ ■



Пример 32.4. Найти изображения функций $\sin\omega t$, $\cos\omega t$ (ω — любое число), c (const), $\operatorname{ch}\omega t$, $\operatorname{sh}\omega t$.

○ Решение: Пользуясь свойством линейности, формулой (32.3), находим:

$$\sin\omega t = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \risingdotseq \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p - i\omega} - \frac{1}{p + i\omega}\right) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2},$$

т. е.

$$\sin\omega t \risingdotseq \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}. \qquad (32.5)$$

Аналогично получаем формулу

$$\cos\omega t \risingdotseq \frac{p}{p^2 + \omega^2}. \qquad (32.6)$$

Далее, $c = c \cdot 1 \risingdotseq c \cdot \frac{1}{p}$, т. е.

$$c \risingdotseq \frac{c}{p}.$$

Наконец, $\operatorname{ch}\omega t = \frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2} \risingdotseq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p - \omega} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p + \omega} = \frac{p}{p^2 - \omega^2}$ т. е.

$$\operatorname{ch}\omega t \risingdotseq \frac{p}{p^2 - \omega^2}. \qquad (32.7)$$

Аналогично получаем формулу

$$\operatorname{sh}\omega t \risingdotseq \frac{\omega}{p^2 - \omega^2}. \qquad (32.8)$$

●

Подобие

Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, $\lambda > 0$, то $f(\lambda t) \risingdotseq \frac{1}{\lambda} \cdot F\left(\frac{p}{\lambda}\right)$, т. е. умножение аргумента оригинала на положительное число λ приводит к делению изображения и его аргумента на это число.

❑ По формуле (32.1) имеем

$$f(\lambda t) \risingdotseq \int_0^\infty f(\lambda t) \cdot e^{-pt} \cdot dt = [\text{положив } \lambda t = t_1] =$$

$$= \frac{1}{\lambda} \cdot \int_0^\infty f(t_1) \cdot e^{-\frac{p}{\lambda}t_1} \cdot dt_1 = \frac{1}{\lambda} \cdot \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-\frac{p}{\lambda}t} \cdot dt = \frac{1}{\lambda} \cdot F\left(\frac{p}{\lambda}\right)$$

(так как безразлично, какой буквой обозначена переменная интегрирования). ■

Например, пусть $\cos t \risingdotseq \frac{p}{p^2 + 1}$. Тогда $\cos\omega t \risingdotseq \frac{1}{\omega} \cdot \frac{\frac{p}{\omega}}{\left(\frac{p}{\omega}\right)^2 + 1} = \frac{p}{p^2 + \omega^2}$.

Смещение (затухание)

Если $f(t) \doteqdot F(p)$, $a = \text{const}$, то $e^{at} \cdot f(t) \doteqdot F(p-a)$, т. е. умножение оригинала на функцию e^{at} влечет за собой смещение переменной p.

❑ В силу формулы (32.1) имеем

$$e^{at} \cdot f(t) \doteqdot \int_0^\infty e^{at} \cdot f(t) e^{-pt}\, dt = \int_0^\infty f(t) e^{-(p-a)t}\, dt = F(p-a)$$

$(\text{Re}(p-a) > s_0)$. ■

Благодаря этому свойству можно расширить таблицу соответствия между оригиналами и их изображениями:

$$e^{at} \cdot \sin\omega t \doteqdot \frac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2}, \qquad (32.9)$$

$$e^{at} \cdot \cos\omega t \doteqdot \frac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2}, \qquad (32.10)$$

$$e^{at} \cdot \text{sh}\,\omega t \doteqdot \frac{\omega}{(p-a)^2-\omega^2},$$

$$e^{at} \cdot \text{ch}\,\omega t \doteqdot \frac{p-a}{(p-a)^2-\omega^2}.$$



Пример 32.5. Найти оригинал по его изображению

$$F(p) = \frac{2p-5}{p^2-6p+11}.$$

❍ Решение: Преобразуем данную дробь так, чтобы можно было воспользоваться свойством смещения:

$$F(p) = \frac{2p-5}{p^2-6p+11} = \frac{2(p-3)+1}{(p-3)^2+2} =$$

$$= 2 \cdot \frac{p-3}{(p-3)^2+(\sqrt{2})^2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{(p-3)^2+(\sqrt{2})^2} \doteqdot$$

$$\doteqdot 2 \cdot e^{3t} \cdot \cos\sqrt{2}t + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{3t} \sin\sqrt{2}t = f(t).$$

(См. формулы (32.9), (32.10) и свойство линейности.) ●

Запаздывание

Если $f(t) \doteqdot F(p)$, $\tau > 0$, то $f(t-\tau) \doteqdot e^{-p\tau}F(p)$, т. е. запаздывание оригинала на положительную величину τ приводит к умножению изображения оригинала без запаздывания на $e^{-p\tau}$.

❑ Положив $t - \tau = t_1$, получим

$$f(t-\tau) \doteqdot \int_0^\infty f(t-\tau) \cdot e^{-pt}\, dt = \int_{-\tau}^\infty f(t_1) e^{-p(t_1+\tau)}\, dt_1 =$$

$$= \int_0^\infty f(t_1) e^{-p\tau} \cdot e^{-pt_1}\, dt_1 = e^{-p\tau} \int_0^\infty f(t) e^{-pt}\, dt = e^{-p\tau} F(p). \quad ■$$

Поясним термин «запаздывание». Графики функции $f(t)$ и $f(t-\tau)$ имеют одинаковый вид, но график функции $f(t-\tau)$ сдвинут на τ единиц вправо (см. рис. 93). Следовательно, функции $f(t)$ и $f(t-\tau)$ описывают один и тот же процесс, но процесс, описываемый функцией $f(t-\tau)$, начинается с опозданием на время τ.

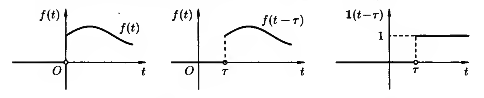


Рис. 93. Рис. 94.

Свойство запаздывания удобно применять при отыскании изображения функций, которые на разных участках задаются различными аналитическими выражениями; функций, описывающих импульсные процессы.

Функция $\mathbf{1}(t-\tau)=\begin{cases}1 & \text{при } t\geqslant\tau,\\ 0 & \text{при } t<\tau\end{cases}$ называется *обобщенной единичной функцией* (см. рис 94).

Так как $\mathbf{1}(t)\doteqdot\frac{1}{p}$, то $\mathbf{1}(t-\tau)\doteqdot\frac{1}{p}\cdot e^{-p\tau}$.

Запаздывающую функцию

$$g(t)=\begin{cases}f(t-\tau) & \text{при } t\geqslant\tau,\\ 0 & \text{при } t<\tau\end{cases}$$

можно записать так: $g(t)=f(t-\tau)\cdot\mathbf{1}(t-\tau)$.



Пример 32.6. Найти изображение $f(t)=t-1$.

○ Решение: Для того чтобы быть оригиналом, функция $f(t)$ должна удовлетворять условиям 1–3 (см. п. 32.1). В этом смысле исходную задачу можно понимать двояко.

Если понимать функцию $f(t)$ как

$$f(t)=\begin{cases}t-1 & \text{при } t\geqslant 0,\\ 0 & \text{при } t<0,\end{cases}$$

т. е. $f(t)=(t-1)\cdot\mathbf{1}(t)$ (см. рис. 95, *а*), то, зная, что $t\doteqdot\frac{1}{p^2}$ (см. формулу (32.4)), $\mathbf{1}\doteqdot\frac{1}{p}$ и, используя свойство линейности, находим

$$f(t)=(t-1)\cdot\mathbf{1}(t)\doteqdot\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p}=F(p).$$

Если же понимать функцию $f(t)$ как

$$f(t)=\begin{cases}t-1 & \text{при } t\geqslant 1,\\ 0 & \text{при } t<1,\end{cases}$$

т. е. $f(t) = (t-1)\cdot \mathbf{1}(t-1)$ (см. рис. 95, *б*), то, используя свойство запаздывания, находим $f(t) = (t-1)\cdot \mathbf{1}(t-1) \risingdotseq \frac{1}{p^2}\cdot e^{-p} = F(p)$. ●

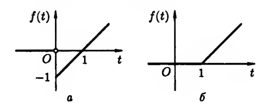


Рис. 95.

Рис. 96.

Пример 32.7. Найти изображение функции

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ 1 & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant 3, \\ 0 & \text{при } t > 3. \end{cases}$$

❍ Решение: Данная функция описывает единичный импульс (см. рис. 96), который можно рассматривать как разность двух оригиналов: единичной функции $\mathbf{1}(t)$ и обобщенной единичной функции $\mathbf{1}(t-3)$. Поэтому $f(t) = \mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t-3) \risingdotseq \frac{1}{p} - \frac{1}{p}\cdot e^{-3p} = F(p)$. ●

Пример 32.8. Найти изображение функции

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0,\ t \geqslant 4, \\ t & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant 2, \\ 4-t & \text{при } 2 < t < 4. \end{cases}$$

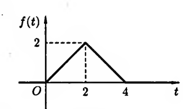


Рис. 97.

❍ Решение: Функция-оригинал изображена на рис. 97. Запишем ее одним аналитическим выражением, используя функции Хевисайда $\mathbf{1}(t)$ и $\mathbf{1}(t-\tau)$:

$$f(t) = t\cdot \mathbf{1}(t) - t\cdot \mathbf{1}(t-2) + (4-t)\cdot \mathbf{1}(t-2) - (4-t)\cdot \mathbf{1}(t-4),$$

т. е.

$$f(t) = t\cdot \mathbf{1}(t) - (t-2+2)\cdot \mathbf{1}(t-2) - (t-2-2)\cdot \mathbf{1}(t-2) + (t-4)\cdot \mathbf{1}(t-4).$$

Раскроем скобки и приведем подобные слагаемые:

$$f(t) = t\cdot \mathbf{1}(t) - 2(t-2)\cdot \mathbf{1}(t-2) + (t-4)\cdot \mathbf{1}(t-4).$$

Изображение функции $f(t)$ будет равно

$$f(t) \risingdotseq \frac{1}{p^2} - 2\cdot \frac{1}{p^2}e^{-2p} + \frac{1}{p^2}e^{-4p} = F(p).$$ ●

Замечания.

1. Изображение периодического оригинала с периодом, равным T, есть $F(p) = \dfrac{1}{1-e^{-Tp}} \int\limits_0^T f(t)e^{-pt}\,dt$.

2. Свойство опережения $f(t+\tau) \doteqdot e^{p\tau}\Big(F(p) - \int\limits_0^\tau f(t)e^{-pt}\,dt\Big)$ применяется значительно реже.

Дифференцирование оригинала

Если $f(t) \doteqdot F(p)$ и функции $f'(t), f''(t), \ldots, f^{(n)}(t)$ являются оригиналами, то

$$f'(t) \doteqdot p \cdot F(p) - f(0), \tag{32.11}$$

$$f''(t) \doteqdot p^2 \cdot F(p) - p \cdot f(0) - f'(0), \tag{32.12}$$

$$f'''(t) \doteqdot p^3 \cdot F(p) - p^2 \cdot f(0) - p \cdot f'(0) - f''(0), \tag{32.13}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$f^{(n)}(t) \doteqdot p^n \cdot F(p) - p^{n-1} \cdot f(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0). \tag{32.14}$$

❑ По определению изображения находим

$$f'(t) \doteqdot \int\limits_0^\infty f'(t)e^{-pt}\,dt = \left[\begin{array}{l|l} u = e^{-pt} & du = -pe^{-pt}\,dt \\ dv = f'(t)\,dt & v = f(t) \end{array}\right] =$$

$$= f(t)e^{-pt}\Big|_0^\infty + p\int\limits_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt = -f(0) + pF(p).$$

Итак, $f'(t) \doteqdot p \cdot F(p) - f(0)$. Пользуясь полученным результатом, найдем изображение второй производной $f''(t)$:

$$f''(t) = \big(f'(t)\big)' \doteqdot p\big(p \cdot F(p) - f(0)\big) - f'(0) = p^2 \cdot F(p) - p \cdot f(0) - f'(0).$$

Аналогично найдем изображение третьей производной $f'''(t)$:

$$f'''(t) \doteqdot p\big(p^2 \cdot F(p) - p \cdot f(0) - f'(0)\big) - f''(0) = p^3 \cdot F(p) - p^2 \cdot f(0) - p \cdot f'(0) - f''(0).$$

Применяя формулу (32.11) $(n-1)$ раз, получим формулу (32.14). ■

Замечание. Формулы (32.11)–(32.14) просто выглядят при нулевых начальных условиях: если $f(0) = 0$, то $f'(t) \doteqdot p \cdot F(p)$; если $f(0) = f'(0) = 0$, то $f''(t) \doteqdot p^2 \cdot F(p)$, и, наконец, если $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0$, то $f^{(n)}(t) \doteqdot p^n \cdot F(p)$, т. е. дифференцированию оригинала соответствует умножение его изображения на p.

Рассмотренное свойство дифференцирования оригинала вместе со свойством линейности широко используется при решении линейных дифференциальных уравнений.

Пример 32.9. Найти изображение выражения

$$x'''(t) - 2x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) + 2,$$

если $x(0) = 3$, $x'(0) = 0$, $x''(0) = -2$.

○ Решение: Пусть $x(t) \doteqdot X(p) = X$. Тогда, согласно формулам (32.11)–(32.13), имеем

$$x'(t) \doteqdot p \cdot X - 3,$$
$$x''(t) \doteqdot p^2 \cdot X - p \cdot 3 - 0,$$
$$x'''(t) \doteqdot p^3 \cdot X - p^2 \cdot 3 - p \cdot 0 + 2,$$
$$2 = 2 \cdot \mathbf{1} \doteqdot \frac{2}{p}.$$

Следовательно,

$$x'''(t) - 2x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) + 2 \doteqdot$$
$$\doteqdot p^3 \cdot X - 3p^2 + 2 - 2(p^2 \cdot X - 3p) - 3(p \cdot X - 3) + 2X + \frac{2}{p}. \quad ●$$

Дифференцирование изображения



Если $f(t) \doteqdot F(p)$, то

$$F'(p) \doteqdot -t \cdot f(t),$$
$$F''(p) \doteqdot (-1)^2 \cdot t^2 \cdot f(t),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$F^{(n)}(p) \doteqdot (-1)^n \cdot t^n \cdot f(t),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

т. е. дифференцированию изображения соответствует умножение его оригинала на $(-t)$.

❑ Согласно теореме 32.1 существования изображения, $F(p)$ является аналитической функцией в полуплоскости $\operatorname{Re} p = s > s_0$. Следовательно, у нее существует производная любого порядка. Дифференцируя интеграл (32.1) по параметру p (обоснование законности этой операции опустим), получим

$$F'(p) = \left(\int_0^\infty f(t) \cdot e^{-pt}\, dt \right)'_p = \int_0^\infty \left(f(t) \cdot e^{-pt} \right)'_p dt =$$
$$= \int_0^\infty f(t) \cdot (-t) e^{-pt}\, dt = \int_0^\infty \left(-t \cdot f(t) \right) e^{-pt}\, dt \doteqdot -t \cdot f(t),$$

т. е. $F'(p) \doteqdot -t \cdot f(t)$. Тогда $F''(p) = \left(F'(p)\right)' \doteqdot -t\left(-t \cdot f(t)\right) = t^2 \cdot f(t)$, $F'''(p) \doteqdot -t\left(t^2 \cdot f(t)\right) = -t^3 \cdot f(t)$ и вообще $F^{(n)}(p) \doteqdot (-1)^n \cdot t^n \cdot f(t)$. ■



Пример 32.10. Найти изображения функций t^n ($n \in \mathbb{N}$), $e^{at} \cdot t^n$, $t \cdot \sin \omega t$, $t \cdot \cos \omega t$, $t \cdot \operatorname{sh} \omega t$, $t \cdot \operatorname{ch} \omega t$, $e^{at} \cdot t \cdot \sin \omega t$, $e^{at} \cdot t \cdot \cos \omega t$.

○ Решение: Так как $\mathbf{1} \doteqdot \frac{1}{p}$, то, в силу свойства дифференцирования изображения, имеем $-t \cdot \mathbf{1} \doteqdot -\frac{1}{p^2}$, т. е.

$$t \doteqdot \frac{1}{p^2}.$$

Далее находим $-t^2 \doteqdot \left(\frac{1}{p^2}\right)'_p = -\frac{2}{p^3}$, т. е. $t^2 \doteqdot \frac{2!}{p^3}$. Продолжая дифференцирование, получим

$$t^n \doteqdot \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

С учетом свойства смещения получаем

$$e^{at} \cdot t^n \doteqdot \frac{n!}{(p-a)^{n+1}}.$$

Согласно формуле (32.5), $\sin\omega t \doteqdot \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$. Следовательно,

$$\left(\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\right)'_p \doteqdot -t\sin\omega t,$$

т. е. $-\frac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2} \doteqdot -t\sin\omega t$, или

$$t\sin\omega t \doteqdot \frac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}. \qquad (32.15)$$

Аналогично, используя формулы (32.6), (32.7) и (32.8), находим

$$t\cos\omega t \doteqdot \frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}, \qquad (32.16)$$

$$t\,\mathrm{sh}\,\omega t \doteqdot \frac{2p\omega}{(p^2-\omega^2)^2},$$

$$t\,\mathrm{ch}\,\omega t \doteqdot \frac{p^2+\omega^2}{(p^2-\omega^2)^2}.$$

С учетом свойства смещения и формул (32.15) и (32.16), получаем

$$e^{at} \cdot t \cdot \sin\omega t \doteqdot \frac{2\omega(p-a)}{((p-a)^2+\omega^2)^2},$$

$$e^{at} \cdot t \cdot \cos\omega t \doteqdot \frac{(p-a)^2-\omega^2}{((p-a)^2+\omega^2)^2}. \qquad ●$$

Интегрирование оригинала



Если $f(t) \doteqdot F(p)$, то $\int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau \doteqdot \frac{F(p)}{p}$, т. е. интегрированию оригинала от 0 до t соответствует деление его изображения на p.

❑ Функция $\varphi(t) = \int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau$ является оригиналом (можно проверить). Пусть $\varphi(t) \doteqdot \Phi(p)$. Тогда по свойству дифференцирования оригинала имеем

$$\varphi'(t) \doteqdot p \cdot \Phi(p) - \varphi(0) = p \cdot \Phi(p)$$

(так как $\varphi(0) = 0$). А так как

$$\varphi'(t) = \left(\int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau\right)'_t = f(t),$$

то $F(p) = p \cdot \Phi(p)$. Отсюда $\Phi(p) = \frac{F(p)}{p}$, т. е. $\int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau \doteqdot \frac{F(p)}{p}$. ■

Интегрирование изображения

Если $f(t) \doteqdot F(p)$ и интеграл $\int\limits_p^{\infty} F(\rho)\,d\rho$ сходится, то $\int\limits_p^{\infty} F(\rho)\,d\rho \doteqdot \frac{f(t)}{t}$,

т. е. интегрированию изображения от p до ∞ соответствует деление его оригинала на t.

☐ Используя формулу (32.1) и изменяя порядок интегрирования (обоснование законности этой операции опускаем), получаем

$$\int\limits_p^{\infty} F(\rho)\,d\rho = \int\limits_p^{\infty}\left(\int\limits_0^{\infty} f(t)e^{-\rho t}\,dt\right)d\rho = \int\limits_0^{\infty}\left(\int\limits_p^{\infty} e^{-\rho t}\,d\rho\right)f(t)\,dt =$$

$$= \int\limits_0^{\infty}\left(-\frac{1}{t}e^{-\rho t}\Big|_p^{\infty}\right)f(t)\,dt = \int\limits_0^{\infty}\frac{f(t)}{t}e^{-pt}\,dt \doteqdot \frac{f(t)}{t}. \quad ■$$

Пример 32.11. Найти изображение функции $\frac{\sin t}{t}$; найти изображение интегрального синуса $\int\limits_0^t \frac{\sin\tau}{\tau}\,d\tau$.

○ Решение: Так как $\sin t \doteqdot \frac{1}{p^2+1}$, то $\frac{\sin t}{t} \doteqdot \int\limits_p^{\infty}\frac{1}{\rho^2+1}\,d\rho = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p$, т. е. $\frac{\sin t}{t} \doteqdot \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p = \operatorname{arcctg} p$. Применяя свойство интегрирования оригинала, получаем $\int\limits_0^t \frac{\sin\tau}{\tau}\,d\tau \doteqdot \frac{\pi}{2p} - \frac{\operatorname{arctg} p}{p}$. ●

Умножение изображений

Если $f_1(t) \doteqdot F_1(p)$, $f_2(t) \doteqdot F_2(p)$, то

$$F_1(p)\cdot F_2(p) \doteqdot \int\limits_0^t f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)\,d\tau. \qquad (32.17)$$

☐ Можно показать, что функция $\int\limits_0^t f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)\,d\tau$ является оригиналом.

Используя преобразование Лапласа (32.1), можно записать

$$\int\limits_0^t f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)\,d\tau \doteqdot \int\limits_0^{\infty}\left(\int\limits_0^t f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)\,d\tau\right)e^{-pt}\,dt =$$

$$= \int\limits_0^{\infty} e^{-pt}\,dt\int\limits_0^t f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)\,d\tau.$$

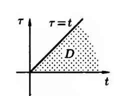


Рис. 98.

Область D интегрирования полученного двукратного интеграла определяется условиями $0 \leqslant t < \infty$, $0 \leqslant \tau \leqslant t$ (см. рис. 98).

Изменяя порядок интегрирования и полагая $t - \tau = t_1$, получим

$$\int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau)\,d\tau \risingdotseq \int_0^\infty f_1(\tau)\,d\tau \int_\tau^\infty e^{-pt} \cdot f_2(t-\tau)\,dt =$$

$$= \int_0^\infty f_1(\tau)e^{-p\tau}\,d\tau \int_0^\infty f_2(t_1)e^{-pt_1}\,dt_1 = F_1(p) \cdot F_2(p). \qquad \blacksquare$$

Интеграл в правой части формулы (32.17) называется ***свертко́й функции*** $f_1(t)$ и $f_2(t)$ и обозначается символом $f_1(t) * f_2(t)$, т. е.

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau)\,d\tau.$$

Можно убедиться (положив $t - \tau = u$), что свертывание обладает свойством переместительности, т. е. $f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$.

Итак, умножение оригиналов равносильно их свертыванию, т. е.

$$F_1(p) \cdot F_2(p) \risingdotseq f_1(t) * f_2(t).$$

Пример 32.12. Найти оригинал функций

$$F(p) = \frac{1}{(p^2+\omega^2)^2} \quad \text{и} \quad F(p) = \frac{p}{(p^2+\omega^2)^2}.$$

○ Решение: Так как $F(p) = \dfrac{1}{(p^2+\omega^2)} \cdot \dfrac{1}{(p^2+\omega^2)}$, и $\dfrac{1}{p^2+\omega^2} \risingdotseq \dfrac{1}{\omega} \cdot \sin\omega t$, то

$$F(p) \risingdotseq \int_0^t \frac{1}{\omega} \cdot \sin\omega\tau \cdot \frac{1}{\omega} \cdot \sin\omega(t-\tau)\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\omega^2} \cdot \int_0^t \big(\cos\omega(2\tau - t) - \cos\omega t\big)\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\omega^2}\left(\frac{1}{2\omega} \cdot \sin\omega(2\tau - t)\Big|_0^t - \cos\omega t \cdot \tau\Big|_0^t\right) =$$

$$= \frac{1}{2\omega^2}\left(\frac{1}{\omega}\sin\omega t - t\cos\omega t\right) = \frac{1}{2\omega^3}(\sin\omega t - \omega t \cdot \cos\omega t),$$

т. е.

$$\frac{1}{(p^2+\omega^2)^2} \risingdotseq \frac{1}{2\omega^3}(\sin\omega t - \omega t \cdot \cos\omega t).$$

Аналогично получаем

$$\frac{p}{(p^2+\omega^2)^2} \risingdotseq \frac{1}{2\omega} \cdot t \cdot \sin\omega t. \qquad \bullet$$

Следствие 32.2. Если $f_1 * f_2 \doteqdot F_1(p) \cdot F_2(p)$ и $f_1'(t)$ также является оригиналом, то

$$p \cdot F_1(p) \cdot F_2(p) \doteqdot \int\limits_0^t f_1'(\tau) \cdot f_2(t-\tau)\, d\tau + f_1(0) \cdot f_2(t). \qquad (32.18)$$

❏ Запишем произведение $p \cdot F_1(p) \cdot F_2(p)$ в виде

$$p \cdot F_1(p) \cdot F_2(p) = p \cdot F_1(p) \cdot F_2(p) - f_1(0) \cdot F_2(p) + f_1(0) \cdot F_2(p),$$

или

$$p \cdot F_1(p) \cdot F_2(p) = \big(p \cdot F_1(p) - f_1(0)\big) \cdot F_2(p) + f_1(0) \cdot F_2(p).$$

Первое слагаемое в правой части есть произведение изображений, соответствующих оригиналам $f_1'(t)$ ($f_1'(t) \doteqdot p \cdot F_1(p) - f_1(0)$) и $f_2(t)$. Поэтому на основании свойства умножения изображений и линейности можно записать $p \cdot F_1(p) \cdot F_2(p) \doteqdot f_1'(t) * f_2(t) + f_1(0) \cdot f_2(t)$ или

$$p \cdot F_1(p) \cdot F_2(p) \doteqdot \int\limits_0^t f_1'(\tau) \cdot f_2(t-\tau)\, d\tau + f_1(0) \cdot f_2(t). \qquad ■$$



Формула (32.18) называется ***формулой Дюамеля***.

На основании свойства переместительности свертки формулу Дюамеля можно записать в виде

$$p \cdot F_1(p) \cdot F_2(p) \doteqdot \int\limits_0^t f_2(\tau) \cdot f_1'(t-\tau)\, d\tau + f_2(t) \cdot f_1(0).$$

Формулу Дюамеля можно применять для определения оригиналов по известным изображениям.

Пример 32.13. Найти оригинал, соответствующий изображению

$$F(p) = \frac{2p^2}{(p^2+1)^2}.$$

❍ Решение: Так как

$$\frac{2p^2}{(p^2+1)^2} = 2p \cdot \frac{1}{p^2+1} \cdot \frac{p}{p^2+1} \quad \text{и} \quad \frac{1}{p^2+1} \doteqdot \sin t, \quad \frac{p}{p^2+1} \doteqdot \cos t,$$

то на основании формулы Дюамеля (32.18) имеем

$$2p \cdot \frac{1}{p^2+1} \cdot \frac{p}{p^2+1} \doteqdot 2\int\limits_0^t \cos\tau \cdot \cos(t-\tau)\, d\tau + 0 = t \cdot \cos t + \sin t. \qquad ●$$

Умножение оригиналов

Если $f_1(t) \risingdotseq F_1(p)$ и $f_2(t) \risingdotseq F_2(p)$, то

$$f_1(t) \cdot f_2(t) \risingdotseq \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} F_1(z) \cdot F_2(p - z)dz,$$

где путь интегрирования — вертикальная прямая $\operatorname{Re} z = \gamma > s_0$ (см. рис. 99) (примем без доказательства).

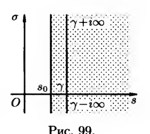


Рис. 99.

Резюме

Рассмотренные свойства преобразования Лапласа представляют собой основные правила (аппарат) операционного исчисления. Для удобства пользования перечислим эти свойства.

1. Линейность: $c_1 \cdot f_1(t) + c_2 \cdot f_2(t) \risingdotseq c_1 \cdot F_1(p) + c_2 \cdot F_2(p)$.
2. Подобие: $f(\lambda t) \risingdotseq \frac{1}{\lambda} \cdot F\left(\frac{p}{\lambda}\right), \lambda > 0$.
3. Смещение: $e^{at} \cdot f(t) \risingdotseq F(p - a)$.
4. Запаздывание: $f(t - \tau) \risingdotseq e^{-p\tau} \cdot F(p), \tau > 0$.
5. Дифференцирование оригинала:

$$f'(t) \risingdotseq p \cdot F(p) - f(0),$$
$$f''(t) \risingdotseq p^2 \cdot F(p) - p \cdot f(0) - f'(0),$$
$$f'''(t) \risingdotseq p^3 \cdot F(p) - p^2 \cdot f(0) - p \cdot f'(0) - f''(0),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

6. Дифференцирование изображения

$$F'(p) \risingdotseq -t \cdot f(t),$$
$$F''(p) \risingdotseq (-1)^2 \cdot t^2 \cdot f(t),$$
$$\dots\dots\dots$$

7. Интегрирование оригинала: $\int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau \risingdotseq \frac{F(p)}{p}$.
8. Интегрирование изображения: $\int\limits_p^\infty F(\rho)\,d\rho \risingdotseq \frac{f(t)}{t}$.
9. Умножение изображений: $F_1(p) \cdot F_2(p) \risingdotseq \int\limits_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t - \tau)\,d\tau = f_1 * f_2$.
10. Умножение оригиналов: $f_1(t) \cdot f_2(t) \risingdotseq \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} F_1(z) \cdot F_2(p - z)dz$.

32.3. Таблица оригиналов и изображений

Составим краткую таблицу, устанавливающую соответствие между некоторыми оригиналами (часто встречающимися на практике) и их изображениями. Достаточно полная таблица оригиналов и изображений, позво-

ляющая по заданному оригиналу находить изображение и наоборот, есть, в частности, в книге «Справочник по операционному исчислению» (авторы В. А. Диткин и П. И. Кузнецов).

Таблица оригиналов и изображений

№	Оригинал $f(t)$	Изображение $F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt$
1	1	$\frac{1}{p}$
2	e^{at}	$\frac{1}{p-a}$
3	t	$\frac{1}{p^2}$
4	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
5	$\cos\omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
6	$\operatorname{sh}\omega t$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$
7	$\operatorname{ch}\omega t$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$
8	$e^{at}\cdot\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2}$
9	$e^{at}\cdot\cos\omega t$	$\frac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2}$
10	$e^{at}\cdot\operatorname{sh}\omega t$	$\frac{\omega}{(p-a)^2-\omega^2}$
11	$e^{at}\cdot\operatorname{ch}\omega t$	$\frac{p-a}{(p-a)^2-\omega^2}$
12	t^n (n — целое)	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
13	$e^{at}\cdot t^n$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
14	$t\cdot\sin\omega t$	$\frac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}$
15	$t\cdot\cos\omega t$	$\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
16	$t\cdot\operatorname{sh}\omega t$	$\frac{2\omega p}{(p^2-\omega^2)^2}$
17	$t\cdot\operatorname{ch}\omega t$	$\frac{p^2+\omega^2}{(p^2-\omega^2)^2}$
18	$e^{at}\cdot t\cdot\sin\omega t$	$\frac{2\omega(p-a)}{((p-a)^2+\omega^2)^2}$
19	$e^{at}\cdot t\cdot\cos\omega t$	$\frac{(p-a)^2-\omega^2}{((p-a)^2+\omega^2)^2}$
20	$\frac{1}{2\omega^3}(\sin\omega t-\omega t\cos\omega t)$	$\frac{1}{(p^2+\omega^2)^2}$
21	$\frac{1}{2\omega^3}(\omega t\operatorname{ch}\omega t-\operatorname{sh}\omega t)$	$\frac{1}{(p^2-\omega^2)^2}$
22	$\sin(\omega t\pm\varphi)$	$\frac{\omega\cos\varphi\pm p\sin\varphi}{p^2+\omega^2}$
23	$\cos(\omega t\pm\varphi)$	$\frac{p\cos\varphi\mp\omega\sin\varphi}{p^2+\omega^2}$

§ 33. ОБРАТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

33.1. Теоремы разложения

Рассмотрим две теоремы, называемые *теоремами разложения*, позволяющие по заданному изображению $F(p)$ находить соответствующий ему оригинал $f(t)$.

Теорема 33.1. Если функция $F(p)$ в окрестности точки $p = \infty$ может быть представлена в виде ряда Лорана

$$F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{p^{n+1}} = \frac{c_0}{p} + \frac{c_1}{p^2} + \frac{c_2}{p^3} + \ldots,$$

то функция

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot \frac{t^n}{n!} = c_0 + c_1 t + \ldots \quad (t > 0)$$

является оригиналом, имеющим изображение $F(p)$, т. е.

$$F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{p^{n+1}} \doteqdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot \frac{t^n}{n!} = f(t).$$

Примем эту теорему без доказательства.

Пример 33.1. Найти оригинал $f(t)$, если

$$F(p) = \frac{1}{p} \cdot \sin\frac{1}{p}; \quad F(p) = \frac{p}{p^2+1}.$$

❍ Решение: Имеем

$$F(p) = \frac{1}{p} \cdot \sin\frac{1}{p} = \frac{1}{p}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{3!}\frac{1}{p^3} + \frac{1}{5!}\frac{1}{p^5} - \ldots\right) = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{3!}\frac{1}{p^4} + \frac{1}{5!}\frac{1}{p^6} - \ldots$$

Следовательно, на основании теоремы 33.1 $f(t) = t - \frac{1}{3!}\frac{t^3}{3!} + \frac{1}{5!}\frac{t^5}{5!} - \ldots$, $t > 0$.

Запишем лорановское разложение функции $F(p) = \frac{p}{p^2+1}$ в окрестности точки $p = \infty$:

$$F(p) = \frac{p}{p^2+1} = \frac{p}{p^2\left(1+\frac{1}{p^2}\right)} = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{p^2}\right)} =$$

$$= \frac{1}{p}\left(1 - \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^4} - \ldots\right) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p^3} + \frac{1}{p^5} - \ldots,$$

где $\left|\frac{1}{p^2}\right| < 1$, т. е. $|p| > 1$. Следовательно, $f(t) = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \ldots$, т. е. $f(t) = \cos t$, $t > 0$. ●

Теорема 33.2. Если $F(p) = \frac{A(p)}{B(p)}$ — правильная рациональная дробь, знаменатель которой $B(p)$ имеет лишь простые корни (нули) $p_1, p_2, \ldots, p_n$, то функция

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} \cdot e^{p_k t} \tag{33.1}$$

является оригиналом, имеющим изображение $F(p)$.

❑ Отметим, что дробь $\frac{A(p)}{B(p)}$ должна быть правильной (степень многочлена $A(p)$ ниже степени многочлена $B(p)$); в противном случае не выполняется необходимый признак существования изображения $\lim\limits_{p\to\infty} F(p) = 0$ (п. 32.1), т. е. $F(p) = \frac{A(p)}{B(p)}$ не может быть изображением.

Разложим правильную рациональную дробь $\frac{A(p)}{B(p)}$ на простейшие:

$$F(p) = \frac{A(p)}{B(p)} = \frac{c_1}{p-p_1} + \frac{c_2}{p-p_2} + \ldots + \frac{c_n}{p-p_n}, \tag{33.2}$$

где c_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ — неопределенные коэффициенты. Для определения коэффициента c_1 этого разложения умножим обе части этого равенства почленно на $p - p_1$:

$$\frac{A(p)}{B(p)} \cdot (p - p_1) = c_1 + (p - p_1)\left(\frac{c_2}{p-p_2} + \frac{c_3}{p-p_3} + \ldots + \frac{c_n}{p-p_n}\right).$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $p \to p_1$, получаем

$$c_1 = \lim_{p\to p_1} \frac{A(p)}{B(p)} \cdot (p - p_1) = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{p\to p_1} \frac{A(p)}{\frac{B(p)-B(p_1)}{p-p_1}} = \frac{A(p_1)}{B'(p_1)}.$$

Итак, $c_1 = \frac{A(p_1)}{B'(p_1)}$. Аналогичным путем (умножая обе части равенства (33.2) на $p - p_i$) найдем $c_i = \frac{A(p_i)}{B'(p_i)}$, $i = 2, \ldots, n$.

Подставляя найденные значения $c_1, c_2, \ldots, c_n$ в равенство (33.2), получим

$$F(p) = \frac{A(p)}{B(p)} = \frac{A(p_1)}{B'(p_1)} \cdot \frac{1}{p-p_1} + \frac{A(p_2)}{B'(p_2)} \cdot \frac{1}{p-p_2} + \ldots + \frac{A(p_n)}{B'(p_n)} \cdot \frac{1}{p-p_n}.$$

Так как по формуле (32.3)

$$\frac{1}{p-p_1} \risingdotseq e^{p_1 t}, \quad \frac{1}{p-p_2} \risingdotseq e^{p_2 t}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{p-p_n} \risingdotseq e^{p_n t},$$

то на основании свойства линейности имеем

$$F(p) = \frac{A(p)}{B(p)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} \cdot \frac{1}{p-p_k} \risingdotseq \sum_{k=1}^{n} \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} \cdot e^{p_k t} = f(t). \quad \blacksquare$$

Замечание. Легко заметить, что коэффициенты c_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ определяются как вычеты комплексной функции $F(p)$ в простых полюсах (формула (31.4)): $c_k = \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} = \mathrm{Res}\left(\frac{A(p)}{B(p)}; p_k\right)$.

Можно показать, что если $F(p) = \frac{A(p)}{B(p)}$ — правильная дробь, но корни (нули) $p_1, p_2, \ldots, p_n$ знаменателя $B(p)$ имеют кратности $m_1, m_2, \ldots, m_n$ соответственно, то в этом случае оригинал изображения $F(p)$ определяется формулой

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(m_k - 1)!} \lim_{p \to p_k} \left(\frac{A(p)}{B(p)} e^{pt} \cdot (p - p_k)^{m_k} \right)^{(m_k - 1)}. \tag{33.3}$$

Теорему 33.2 можно сформулировать следующим образом:

Теорема 33.3. Если изображение $F(p) = \frac{A(p)}{B(p)}$ является дробно-рациональной функцией от p и $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — простые или кратные полюсы этой функции, то оригинал $f(t)$, соответствующий изображению $F(p)$, определяется формулой

$$F(p) = \frac{A(p)}{B(p)} \div \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}\left(F(p_k) \cdot e^{p_k t}\right) = f(t). \tag{33.4}$$

33.2. Формула Римана–Меллина



Общий способ определения оригинала по изображению дает *обратное преобразование Лапласа* (формула обращения Римана–Меллина), имеющее вид

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} F(p) \cdot e^{pt}\, dt, \tag{33.5}$$

где интеграл берется вдоль любой прямой $\mathrm{Re}\, p = \gamma > S_0$.

При определенных условиях интеграл (33.5) вычисляется по формуле

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} F(p) \cdot e^{pt}\, dt = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}\left(F(p) \cdot e^{pt}; p_k\right).$$



Замечание. На практике отыскание функции-оригинала обычно проводят по следующему плану: прежде всего следует по таблице оригиналов и изображений попытаться отыскать для заданного изображения $F(p)$ соответствующий ему оригинал; второй путь состоит в том, что функцию $F(p)$ стараются представить в виде суммы простейших рациональных дробей, а затем, пользуясь свойством линейности, найти оригинал; наконец, использовать теоремы разложения, свойство умножения изображений, формулу обращения и т.д.



Пример 33.2. Найти оригинал по его изображению $F(p) = \frac{p - 3}{p^2 + 4}$.

Решение: Проще всего поступить так:

$$F(p)=\frac{p-3}{p^2+4}=\frac{p}{p^2+4}-\frac{3}{p^2+4}=\frac{p}{p^2+2^2}-\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{p^2+2^2}\risingdotseq\cos 2t-\frac{3}{2}\sin 2t=f(t)$$

(использовали свойство линейности и формулы (32.5) и (32.6)).

Если же использовать теорему 33.2 разложения, то будем иметь: $A(p) = p - 3$, $B(p) = p^2 + 4$, $B'(p) = 2p$, корни знаменателя $p_1 = 2i$ и $p_2 = -2i$ и, согласно формуле (33.1),

$$f(t) = \frac{2i-3}{2\cdot 2i}e^{2it} + \frac{-2i-3}{2(-2i)}e^{-2it} = \frac{1}{4i}\left(2i(e^{2it}+e^{-2it}) - 3(e^{2it}-e^{-2it})\right) =$$

$$= \frac{1}{4i}\left(2i(\cos 2t+i\sin 2t+\cos 2t-i\sin 2t)-3(\cos 2t+i\sin 2t-\cos 2t+i\sin 2t)\right) =$$

$$= \frac{1}{4i}(4i\cos 2t - 6i\sin 2t) = \cos 2t - \frac{3}{2}\sin 2t = f(t).$$ ●

Пример 33.3. Найти функцию-оригинал, если ее изображение задано как $F(p) = \frac{1}{p^3(p-1)}$.

Решение: Здесь $A(p) = 1$, $B(p) = p^3(p-1)$, $B'(p) = 4p^3 - 3p^2$, $p_1 = 1$ — простой корень знаменателя, $p_2 = 0$ — 3-кратный корень ($m = 3$). Используя формулы (33.1) и (33.3), имеем:

$$f(t) = \frac{1}{4-3}\cdot e^{1\cdot t} + \frac{1}{2!}\lim_{p\to 0}\left(\frac{1}{p^3(p-1)}e^{pt}\cdot(p-0)^3\right)'' =$$

$$= e^t + \frac{1}{2}\lim_{p\to 0}\left(\frac{e^{pt}}{p-1}\right)'' = \ldots = e^t - \frac{t^2}{2} - t - 1,$$

т. е. $f(t) = e^t - \frac{t^2}{2} - t - 1$.

Приведем другой способ нахождения $f(t)$. Разобьем дробь $\frac{1}{p^3(p-1)}$ на сумму простейших дробей: $F(p) = \frac{1}{p^3(p-1)} = -\frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^3} + \frac{1}{p-1}$. Следовательно, $f(t) = -1 - t - \frac{t^2}{2} + e^t$.

Приведем третий способ нахождения $f(t)$. Представим $F(p)$ как произведение $\frac{1}{p^3(p-1)} = \frac{1}{p^3}\cdot\frac{1}{p-1}$, и так как $\frac{1}{p^3} \risingdotseq \frac{t^2}{2}$ и $\frac{1}{p-1} \risingdotseq e^t$, то, пользуясь свойством умножения изображений, имеем:

$$F(p) \risingdotseq \int_0^t \frac{1}{2}\tau^2 e^{t-\tau}\,d\tau = \left[\begin{array}{c|c} u=\tau^2 & du = 2\tau\,d\tau \\ dv = e^{t-\tau}\,d\tau & v = -e^{t-\tau}\end{array}\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}e^{t-\tau}\tau^2\Big|_0^t + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\int_0^t \tau e^{t-\tau}\,d\tau = \left[\begin{array}{c|c} u=\tau & du = d\tau \\ dv = e^{t-\tau}\,d\tau & v = -e^{t-\tau}\end{array}\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}t^2+0+(-\tau\cdot e^{t-\tau})\Big|_0^t - e^{t-\tau}\Big|_0^t = -\frac{1}{2}t^2 - t + 0 - 1 + e^t = e^t - \frac{t^2}{2} - t - 1 = f(t).$$ ●

§ 34. ОПЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ИХ СИСТЕМ

Пусть требуется найти частное решение линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(t), \tag{34.1}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y(0) = c_0, \quad y'(0) = c_1, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(0) = c_{n-1},$$

где $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ — заданные числа.

Будем считать, что искомая функция $y(t)$ вместе с ее рассматриваемыми производными и функция $f(t)$ являются оригиналами.

Пусть $y(t) \doteqdot Y(p) = Y$ и $f(t) \doteqdot F(p) = F$. Пользуясь свойствами дифференцирования оригинала и линейности, перейдем в уравнении (34.1) от оригиналов к изображениям:

$$(p^n Y - p^{n-1} c_0 - p^{n-2} c_1 - \ldots - c_{n-1}) + a_1 (p^{n-1} Y - p^{n-2} c_0 - \ldots - c_{n-2}) + \ldots$$
$$\ldots + a_{n-1}(pY - c_0) + a_n Y = F.$$

Полученное уравнение называют *операторным* (или уравнением в изображениях). Разрешим его относительно Y:

$$Y(p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p + a_n) =$$
$$= F + c_0(p^{n-1} + a_1 p^{n-2} + \ldots + a_{n-1}) + c_1(p^{n-2} + a_1 p^{n-3} + \ldots + a_{n-2}) + \ldots + c_{n-1},$$

т. е. $Y(p) \cdot Q_n(p) = F(p) + R_{n-1}(p)$, где $Q_n(p)$ и $R_{n-1}(p)$ — алгебраические многочлены от p степени n и $n-1$ соответственно.

Из последнего уравнения находим

$$Y(p) = \frac{F(p) + R_{n-1}(p)}{Q_n(p)}. \tag{34.2}$$

Полученное равенство называют *операторным решением* дифференциального уравнения (34.1). Оно имеет более простой вид, если все начальные условия равны нулю, т. е. $y(0) = y'(0) = \ldots = y^{(n-1)}(0) = 0$. В этом случае $Y(p) = \dfrac{F(p)}{Q_n(p)}$.

Находя оригинал $y(t)$, соответствующий найденному изображению (34.2), получаем, в силу теоремы единственности, частное решение дифференциального уравнения (34.1).

Замечание. Полученное решение $y(t)$ во многих случаях оказывается справедливым при всех значениях t (а не только при $t \geqslant 0$).

Пример 34.1. Решить операционным методом дифференциальное уравнение $y'' - 3y' + 2y = 12e^{3t}$ при условиях $y(0) = 2, y'(0) = 6$.

○ Решение: Пусть $y(t) \doteqdot Y(p) = Y$. Тогда

$$y'(t) \doteqdot pY - y(0) = pY - 2,$$
$$y''(t) \doteqdot p^2 Y - py(0) - y'(0) = p^2 Y - 2p - 6,$$
$$\text{и} \quad e^{3t} \doteqdot \frac{1}{p-3}.$$

Подставляя эти выражения в дифференциальное уравнение, получаем операторное уравнение: $p^2Y - 2p - 6 - 3(pY - 2) + 2Y = 12\frac{1}{p-3}$. Отсюда $Y(p) = \frac{2p^2 - 6p + 12}{(p-1)(p-2)(p-3)}$. Находим $y(t)$. Можно разбить дробь на сумму простейших ($Y(p) = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{p-2} + \frac{C}{p-3}$), но так как корни знаменателя ($p_1 = 1$, $p_2 = 2$, $p_3 = 3$) простые, то удобно воспользоваться второй теоремой разложения (формула (33.1)), в которой

$$A(p) = 2p^2 - 6p + 12,$$
$$B'(p) = (p-2)(p-3) + (p-1)(p-3) + (p-1)(p-2).$$

Получаем:

$$y(t) = \frac{8}{(-1)\cdot(-2)}e^{1\cdot t} + \frac{8}{1\cdot(-1)}e^{2\cdot t} + \frac{12}{2\cdot 1}e^{3\cdot t} = 4e^t - 8e^{2t} + 6e^{3t}.$$ ●

Пример 34.2. Найти решение уравнения

$$y'' + 4y = \begin{cases} \frac{1}{2}\cdot t, & \text{если } 0 \leqslant t < 2, \\ 3 - t, & \text{если } 2 \leqslant t < 3, \\ 0, & \text{если } t < 0,\ t \geqslant 3 \end{cases}$$

при условии $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Рис. 100.

❍ Решение: График данной функции имеет вид, изображенный на рисунке 100. С помощью единичной функции правую часть данного дифференциального уравнения можно записать одним аналитическим выражением:

$$f(t) = \frac{1}{2}t\cdot\mathbf{1}(t) - \frac{1}{2}t\cdot\mathbf{1}(t-2) + (3-t)\cdot\mathbf{1}(t-2) - (3-t)\mathbf{1}(t-3) =$$
$$= \frac{1}{2}t\cdot\mathbf{1}(t) - \frac{1}{2}(t-2+2)\cdot\mathbf{1}(t-2) - (t-2-1)\cdot\mathbf{1}(t-2) + (t-3)\cdot\mathbf{1}(t-3) =$$
$$= \frac{1}{2}t\cdot\mathbf{1}(t) - \frac{1}{2}(t-2)\cdot\mathbf{1}(t-2) - \mathbf{1}(t-2) - (t-2)\cdot\mathbf{1}(t-2) + \mathbf{1}(t-2) + (t-3)\cdot\mathbf{1}(t-3) =$$
$$= \frac{1}{2}t\cdot\mathbf{1}(t) - \frac{3}{2}(t-2)\cdot\mathbf{1}(t-2) + (t-3)\cdot\mathbf{1}(t-3).$$

Таким образом, имеем

$$y'' + 4y = \frac{1}{2}t\cdot\mathbf{1}(t) - \frac{3}{2}(t-2)\cdot\mathbf{1}(t-2) + (t-3)\cdot\mathbf{1}(t-3).$$

Операторное уравнение, при нулевых начальных условиях имеет вид

$$p^2Y + 4Y = \frac{1}{2}\frac{1}{p^2} - \frac{3}{2}\frac{1}{p^2}e^{-2p} + \frac{1}{p^2}e^{-3p}.$$

Отсюда

$$Y(p) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p^2(p^2+4)} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{p^2(p^2+4)}e^{-2p} + \frac{1}{p^2(p^2+4)}e^{-3p}.$$

Так как

$$\frac{1}{p^2(p^2+4)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2+4}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{p^2+2^2}\right) \risingdotseq \frac{1}{4}\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right),$$

то по теореме запаздывания находим:

$$y(t) = \frac{1}{8}\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right) - \frac{3}{8}\left(t - 2 - \frac{1}{2}\sin 2(t-2)\right)\mathbf{1}(t-2) +$$
$$+ \frac{1}{4}\left(t - 3 - \frac{1}{2}\sin 2(t-3)\right)\mathbf{1}(t-3). \quad \bullet$$

Аналогично применяется операционный метод для решения систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Покажем это на конкретном примере.

Пример 34.3. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = y - z, \\ y' = x + y, \\ z' = x + z; \end{cases} \quad x(0) = 1,\ y(0) = 2,\ z(0) = 3.$$

Решение: Пусть

$$x = x(t) \risingdotseq X(p) = X; \quad y = y(t) \risingdotseq Y(p) = Y; \quad z = z(t) \risingdotseq Z(p) = Z.$$

Находим, что

$$x' \risingdotseq pX - 1; \quad y' \risingdotseq pY - 2; \quad z' \risingdotseq pZ - 3.$$

Система операторных уравнений принимает вид

$$\begin{cases} pX - Y + Z = 1, \\ X - (p-1)Y = -2, \\ X + (1-p)Z = -3. \end{cases}$$

Решая эту систему алгебраических уравнений, находим:

$$X(p) = \frac{p-2}{p(p-1)},$$

$$Y(p) = \frac{2p^2 - p - 2}{p(p-1)^2},$$

$$Z(p) = \frac{3p^2 - 2p - 2}{p(p-1)^2}.$$

Переходя от изображений к оригиналам, получаем искомые решения:

$$X(p) = \frac{p-2}{p(p-1)} = \frac{2p-2-p}{p(p-1)} = \frac{2(p-1)}{p(p-1)} - \frac{p}{p(p-1)} = \frac{2}{p} - \frac{1}{p-1} \risingdotseq 2 - e^t = x(t),$$

$$Y(p) = \frac{2p^2 - p - 2}{p(p-1)^2} = -\frac{2}{p} + \frac{4}{p-1} - \frac{1}{(p-1)^2} \risingdotseq -2 + 4e^t - te^t = y(t),$$

$$Z(p) = \frac{3p^2 - 2p - 2}{p(p-1)^2} = -\frac{2}{p} + \frac{5}{p-1} - \frac{1}{(p-1)^2} \risingdotseq -2 + 5e^t - te^t = z(t).$$

Ответ: $x(t) = 2 - e^t$, $y(t) = -2 + 4e^t - te^t$, $z(t) = -2 + 5e^t - te^t$. $\bullet$

С помощью операционного исчисления можно также находить решения линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, уравнений в частных производных, уравнений в конечных разностях (разностных уравнений); производить суммирование рядов; вычислять интегралы. При этом решение этих и других задач значительно упрощается.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Таблица разложений в ряд Маклорена некоторых элементарных функций

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \qquad x \in (-\infty; \infty),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, \qquad x \in (-\infty; \infty),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \qquad x \in (-\infty; \infty),$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \dots,$$

$$x \in \begin{cases} [-1; 1], & \text{если } \alpha \geqslant 0, \\ (-1; 1], & \text{если } -1 < \alpha < 0, \\ (-1; 1), & \text{если } \alpha \leqslant -1, \end{cases}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots, \qquad x \in (-1; 1),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots, \qquad x \in (-1; 1],$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \dots, \qquad x \in [-1; 1],$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \dots$$

$$\dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots, \qquad x \in [-1; 1],$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, \qquad x \in (-\infty; \infty),$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \qquad x \in (-\infty; \infty).$$

Таблица оригиналов и изображений

№	Оригинал $f(t)$	Изображение $F(p) = \int\limits_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt$
1	1	$\frac{1}{p}$
2	e^{at}	$\frac{1}{p-a}$
3	t	$\frac{1}{p^2}$
4	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
5	$\cos\omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
6	$\operatorname{sh}\omega t$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$
7	$\operatorname{ch}\omega t$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$
8	$e^{at}\cdot\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2}$
9	$e^{at}\cdot\cos\omega t$	$\frac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2}$
10	$e^{at}\cdot\operatorname{sh}\omega t$	$\frac{\omega}{(p-a)^2-\omega^2}$
11	$e^{at}\cdot\operatorname{ch}\omega t$	$\frac{p-a}{(p-a)^2-\omega^2}$
12	t^n (n — целое)	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
13	$e^{at}\cdot t^n$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
14	$t\cdot\sin\omega t$	$\frac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}$
15	$t\cdot\cos\omega t$	$\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
16	$t\cdot\operatorname{sh}\omega t$	$\frac{2\omega p}{(p^2-\omega^2)^2}$
17	$t\cdot\operatorname{ch}\omega t$	$\frac{p^2+\omega^2}{(p^2-\omega^2)^2}$
18	$e^{at}\cdot t\cdot\sin\omega t$	$\frac{2\omega(p-a)}{((p-a)^2+\omega^2)^2}$
19	$e^{at}\cdot t\cdot\cos\omega t$	$\frac{(p-a)^2-\omega^2}{((p-a)^2+\omega^2)^2}$
20	$\frac{1}{2\omega^3}(\sin\omega t-\omega t\cos\omega t)$	$\frac{1}{(p^2+\omega^2)^2}$
21	$\frac{1}{2\omega^3}(\omega t\operatorname{ch}\omega t-\operatorname{sh}\omega t)$	$\frac{1}{(p^2-\omega^2)^2}$
22	$\sin(\omega t\pm\varphi)$	$\frac{\omega\cos\varphi\pm p\sin\varphi}{p^2+\omega^2}$
23	$\cos(\omega t\pm\varphi)$	$\frac{p\cos\varphi\mp\omega\sin\varphi}{p^2+\omega^2}$

По вопросам оптовых закупок обращаться:
тел./факс: (495) 785-15-30, e-mail: trade@airis.ru
Адрес: Москва, пр. Мира, 104

Наш сайт: www.airis.ru

Вы можете приобрести наши книги с 11^{00} до 17^{30}, кроме субботы, воскресенья, в киоске по адресу: пр. Мира, д. 104, 4 этаж, тел. (495) 785-15-30

Адрес редакции: 129626, Москва, а/я 66

Издательство «АЙРИС-пресс» приглашает к сотрудничеству авторов образовательной и развивающей литературы. По всем вопросам обращаться по тел.: (495) 785-15-33, e-mail: editor@airis.ru

Учебное издание

Письменный Дмитрий Трофимович

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ
2 часть

Ведущий редактор *В. В. Черноруцкий*
Редактор *Л. В. Абламская*
Оформление обложки *А. М. Драговой*
Иллюстрации *А. Ю. Терская*
Технический редактор *С. С. Коломеец*
Компьютерная верстка *К. Е. Панкратьев*
Корректор *Н. С. Калашникова*

Подписано в печать 13.05.08. Формат 70×100/16.
Гарнитура «Компьютер Модерн». Печать офсетная. Печ. л. 16.
Усл.-печ. л. 20,8. Доп. тираж 20 000 экз. Заказ № 1765.

ООО «Издательство «АЙРИС-пресс»
113184, Москва, ул. Б. Полянка, д. 50, стр. 3.

Отпечатано в ОАО «Можайский полиграфический комбинат»
143200, г. Можайск, ул. Мира, 93


издательство
Айрис



Д. Т. Письменный – автор бестселлера «Готовимся к экзамену по математике», выпускаемого в серии «Домашний репетитор», пособия, по которому за последние четыре года подготовились к экзаменам более 500 000 школьников и абитуриентов из России и других стран бывшего СССР.

Вторая часть курса лекций по высшей математике предназначена для всех категорий студентов, изучающих в том или ином объеме высшую математику, содержит как традиционные разделы, изучаемые на инженерно-технических специальностях вузов, так и разделы спецкурсов.

Доступный, но строгий язык пособия, большое количество задач – прекрасная возможность быстро подготовиться к экзамену, зачету, коллоквиуму.

